第 12 卷第 6 期
1995 年 12 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 12, No. 6
Dec., 1995

非线性系统闭环 P 型迭代学习控制的收敛性

林　辉
(西北工业大学自动控制系·西安,710072)

王　林
(西安邮电学院基础部·西安,710061)

摘要：本文得到并证明了当被控系统的状态方程为一类非线性方程时，采用闭环 P 型学习律迭代学习控制的收敛的充分条件和必要条件，最后，我们给出了典型的仿真结果.

关键词：非线性系统；收敛性；迭代学习控制；闭环 P 型学习

1 引　言

本文研究采用闭环 P 型学习律时迭代学习控制的收敛性. 我们所研究的动态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_k(t) = f(t, x_k(t), u_k(t)), \\ y_k(t) = g(t, x_k(t)) + D(t)u_k(t), \end{cases} \tag{1}$$

学习律为

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \Gamma(t)e_{k-1}(t). \tag{2}$$

其中，$e_k(t) = y_d(t) - y_k(t)$ 为输出误差，$x \in \mathrm{R}^{n+1}$，$y \in \mathrm{R}^{m+1}$，$u \in \mathrm{R}^{r+1}$，f, g, D 为适当维数的向量或矩阵，y_d 为期望输出.

我们所要研究的问题是：当[2]中的 $\Gamma(t)$ 满足什么条件时，输出误差在时间区间$[0,T]$内一致地趋于零？目前在这方面已有一些研究结果. 文献[3]及[6]研究了当(1)中的函数 f 关于 u 是线性时的收敛性条件，其收敛性条件为矩阵$(I + \Gamma(t)D(t))^{-1}$ 的范数小于 1. 而当函数 f 为一般的非线性函数时，目前尚无关于收敛性的结论.

本文在(1)中的函数 f 为一类非线性函数时，考察了采用闭环 P 型学习律时迭代学习控制的收敛性. 我们证明了当矩阵$[I + \Gamma(t)D(t)]^{-1}$ 的谱半径小于 1 时，输出误差趋于零，且在 $\Gamma(t), D(t)$ 与时间无关时，该条件还是收敛的必要条件. 由于矩阵之谱半径不超过其任何范数，故本文结论较已有结果有改进. 而且由于 f 可为一大类非线性函数，故本文结论具有更广的适用范围.

2 预备引理

定义　设 X 为 Banach 空间，有界线性算子 $P, X \to X$ 的谱为$\{\lambda \mid \lambda I - P$ 不是 1-1 映满的$\}$，而其谱半径为 $\sup\{|\lambda| \mid \lambda \in P$ 的谱$\}$，记为 $\rho(P)$.

引理　设算子 $Q: c_r[0,T] \to c_r[0,T]$ 满足

i) $\| Q(x)(t) \| \leqslant M(q + \int_0^t \| x(s) \| \mathrm{d}s)$,　$\forall\, x(t) \in c_r[0,T]$.

ii) $\| Q(x)(t) - Q(y)(t) \| \leqslant M\int_0^t \| x(s) - y(s) \| \mathrm{d}s$,　$\forall\, x(t), y(t) \in c_r[0,T]$.

其中 $M \geqslant 0, q \geqslant 0$ 为常数，$c_r[0,T]$ 为$[0,T]$上的 r 维向量值连续函数空间. 则有

a) $\forall\, y(t) \in c_r[0,T]$，存在唯一的 $x(t) \in c_r[0,T]$ 使得

本文于 1992 年 12 月 11 日收到. 1995 年 3 月 28 日收到修改稿.

$$x(t)+Q(x)(t)=y(t). \tag{3}$$

b) 若定义算子 $\overline{Q}:c_r[0,T]\to c_r[0,T]$ 为

$$\overline{Q}(y)(t)=Q(x)(t),\quad \forall\ y(t)\in c_r[0,T].$$

其中 $x(t)\in c_r[0,T]$ 为由(3)式确定的唯一解. 则存在 $M_1>0$, 使得

$$\|\overline{Q}(y)(t)\|\leqslant M_1(q+\int_0^t\|y(s)\|\mathrm{d}s).$$

证　a) 定义算子 $Q_1:c_r[0,T]\to c_r[0,T]$ 为对于 $x(t)\in c_r[0,T]$, $Q_1(x)(t)=y(t)-Q(x)(t)$, 则结论 a) 等价于 Q_1 存在唯一的不动点. 先证存在性. 取 $x_0(t)\in c_r[0,T]$, 定义

$$x_n(t)=Q_1(x_{n-1})(t). \tag{4}$$

则易知 $\{x_n(t)\}_{n\geqslant 0}\subset c_r[0,T]$. 据条件 ii), 且据归纳法有, $\forall\ n\geqslant 1$, $\|x_{n+1}(t)-x_n(t)\|\leqslant\frac{M^nt^n}{n!}\|x_1-x_0\|$. 故 $\forall\ n\geqslant 1$, $\|x_{n+1}-x_n\|\leqslant\frac{M^nT^n}{n!}\|x_1-x_0\|$. 于是 $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ 为 $c_r[0,T]$ 中的 Cauchy 序列, 从而存在 $x(t)\in c_r[0,T]$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0$. 在(4)之两端取极限, 得到 $x(t)=Q_1(x)(t)$, 存在性得证. 下面证唯一性.

若 $\overline{x}(t),x(t)\in c_r[0,T]$ 皆为 Q_1 的不动点, 则 $\|\overline{x}(t)-x(t)\|=\|Q_1(\overline{x})(t)-Q_1(x)(t)\|\leqslant M\int_0^t\|\overline{x}(s)-x(s)\|\mathrm{d}s$, 据 Bellmen-Gronwall 引理, $\overline{x}(t)x\equiv x(t)$. a)得证.

b) $\forall\ y(t)\in c_r[0,T]$,

$$\|\overline{Q}(y)(t)\|=\|Q(x)(t)\|\leqslant\|Q(x)(t)-Q(y)(t)\|+\|Q(y)(t)\|,$$

据条件 i), ii) 及 (3), $\|\overline{Q}(y)(t)\|\leqslant M\int_0^t\|\overline{Q}(y)(s)\|\mathrm{d}s+M[q+\int_0^t\|y(s)\|\mathrm{d}s]$. 据 Bellman-Gronwall 引理, 存在 $M_1>0$, 使得

$$\|\overline{Q}(y)(t)\|\leqslant M_1[q+\int_0^t\|y(s)\|\mathrm{d}s].$$

b)得证.

3　主要结果

本节给出并证明本文的主要结论.

定理　设被控系统动态过程如(1), 且满足

A1) $\forall\ t,u_1,u_2,x_1,x_2$, 有 $\|f(t,x_1,u_1)-f(t,x_2,u_2)\|\leqslant M(\|x_1-x_2\|+\|u_1-u_2\|)$.

A2) $\forall\ t,x_1,x_2$ 有 $\|g(t,x_1)-g(t,x_2)\|\leqslant M\|x_1-x_2.\|$

A3) 存在唯一的理想控制 $u_d(t)$ 使得系统的状态和输出为期望值 $x_d(t),y_d(t)$.

A4) 初始状态 $\{x_k(0)\}_{k\geqslant 1}$ 满足 $\lim\limits_{k\to\infty}x_k(0)=x_d(0)$.

A5) $(I+\Gamma(t)D(t))^{-1}$ 存在.

其中, M 为正常数, $\Gamma(t)$ 如(2)所示.

若采用(2)给出的闭环 P 型学习律, 则对于任意给定的初始状态 $x_k(0)$(满足 A4)) 及任意给定的初始控制 $u_0(t)$, 由(1), (2) 得到的 $\{x_k(t)\}$, $\{y_k(t)\}$, $\{u_k(t)\}$ 在 $[0,T]$ 上一致收敛到 $x_d(t),y_d(t),u_d(t)$ 的充分条件为

$$\forall\ t\in[0,T],\quad \rho[(I+\Gamma(t)D(t))^{-1}]<1. \tag{5}$$

而必要条件为 $$\rho[(I+\Gamma(0)D(0))^{-1}]<1. \tag{6}$$

证

令 $$\begin{cases}\delta x_k(t)=x_d(t)-x_k(t),\\ \delta y_k(t)=y_d(t)-y_k(t),\\ \delta u_k(t)=u_d(t)-u_k(t),\end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases}f_1(t,x,u)=f(t,x_d(t),u_d(t))-f(t,x_d(t)-x,u_d(t)-u),\\ g_1(t,x)=g(t,x_d(t))-g(t,x_d(t)-x).\end{cases} \tag{8}$$

由(1),(2),(7),(8)得到

$$\begin{cases}\delta \dot{x}_k(t)=f_1(t,\delta x_k(t),\delta u_k(t)),\\ \delta x_k(0)=x_d(0)-x_k(0),\\ \delta u_{k+1}(t)=\delta u_k(t)-\Gamma(t)D(t)\delta u_{k+1}(t)-\Gamma(t)g_1(t,\delta x_{k+1}(t)).\end{cases} \tag{9}$$

利用 A5),(9)之最后一个关系式可化为

$$\delta u_{k+1}(t)=(I+\Gamma(t)D(t))^{-1}\delta u_k(t)-(I+\Gamma(t)D(t))^{-1}\Gamma(t)g_1(t,\delta x_{k+1}(t)). \tag{10}$$

定义 $G_k:c_r[0,T]\to c_r[0,T]$ 为

$$G_k(u)(t)=(I+\Gamma(t)D(t))^{-1}\Gamma(t)g_1(t,x(t)),\quad u(t)\in c_r[0,T].$$

其中 $x(t)$ 满足

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=f_1(t,x(t),u(t)),\\ x(0)=x_d(0)-x_k(0).\end{cases} \tag{11}$$

于是(10)可化为

$$\delta u_{k+1}(t)+G_k(\delta u_{k+1})(t)=(I+\Gamma(t)D(t))^{-1}\delta u_k(t). \tag{12}$$

据 Bellman-Gronwall 引理可以验证 G_k 满足引理中 Q 的条件. 由引理的结论 b),定义 $\overline{G}_k$: $c_r[0,T]\to c_r[0,T]$ 为

$$\overline{G}_k(v)(t)=G_k(u)(t),\quad \forall\, v(t)\in c_r[0,T]. \tag{13}$$

其中 $u(t)$ 为 $u(t)+G_k(u)(t)=v(t)$ 唯一确定(据结论 a)). $\forall\, u(t)\in c_r[0,T]$ 令 $P(u)(t)=(I+\Gamma(t)D(t))^{-1}u(t)$, $Q_k(u)(t)=-\overline{G}_k(Pu)(t)$, 则(12)可进一步写成

$$\delta u_{k+1}(t)=(P\delta u_k)(t)+Q_k(\delta u_k)(t). \tag{14}$$

据引理的结论 b),存在 $M_1>0$,使得

$$\|\overline{G}_k(Pu)(t)\|\leqslant M_1(\|x_d(0)-x_k(0)\|+\int_0^t\|Pu(s)\|\,ds), \tag{15}$$

于是

$$\|Q_k(u)(t)\|\leqslant M_2(\|x_d(0)-x_k(0)\|+\int_0^t\|u(s)\|\,ds). \tag{16}$$

由(14),(16)及文献[4]的引理 4 知道,若 $\forall\, t\in[0,T]$, $\rho(I+\Gamma(t)D(t))^{-1}<1$, 则 $\lim\limits_{k\to\infty}\delta u_{k+1}(t)=0$ 在$[0,T]$上一致成立. 从而再据(7),(8),(9)及 Bellman-Gronwall 引理, $\delta x_k(t)$、$\delta y_k(t)$ 皆关于 t 一致趋于零. 充分性于是得证.

另一方面,若取 $x_d(0)=x_k(0)$, $\forall\, k\geqslant 1$ 则由(16)知, $\forall\, u\in c_r[0,T]$, $Q_k(u)(0)=0$, 从而据(14)及 P 之定义, $\forall\, u_0(t)\in c_r[0,T]$, $\delta u_{k+1}(0)=(I+\Gamma(0)D(0))^{-k-1}\delta u_0(0)$, 故只要 $\rho(I+\Gamma(0)D(0))^{-1}\geqslant 1$, 必存在 $u_0(t)\in c_r[0,T]$, 使得 $\delta u_{k+1}(0)\not\to 0$, 即系统(1),(2)不收

敛. 必要性得证.

注 1　当 $\Gamma(t)$,$D(t)$ 为常数矩阵时,(5) 和(6) 相同,从而(5) 和(6) 成为系统(1),(2) 收敛的充要条件.

注 2　由(5) 和(6) 看到,收敛条件与状态方程中的函数 $f(t,x,u)$ 的具体形式无关.

4　仿真结果

例
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sin(tx_1(t)+u_2(t))\cdot\cos(x_2(t))\\ \operatorname{arctg}(t+u_2(t))\end{bmatrix}\tag{17}$$
$$\begin{bmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(tx_1(t)+x_2(t))\\ \sin t\cos x_1(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}u_1(t)\\ u_2(t)\end{bmatrix},\quad(0\leqslant t\leqslant 10).$$

期望轨迹为 $\begin{bmatrix}y_{d1}(t)\\ y_{d2}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\sin\dfrac{\pi t}{5}\\ \dfrac{t}{2}\cos\dfrac{2\pi t}{5}\end{bmatrix}$,初始状态 $\begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$.

记　$\bar{x}(t)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$,　$\bar{y}(t)=\begin{bmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\end{bmatrix}$,　$\bar{u}(t)=\begin{bmatrix}u_1(t)\\ u_2(t)\end{bmatrix}$,　$\bar{y}_d(t)=\begin{bmatrix}y_{d1}(t)\\ y_{d2}(t)\end{bmatrix}$.

由(17)知,D 为单位阵,故若取学习律为 $\bar{u}_{k+1}(t)=\bar{u}_k(t)+\Gamma e_{k+1}(t)$,其中 $e_k(t)=\bar{y}_d(t)-\bar{y}_k(t)$,$\Gamma=\begin{bmatrix}-91 & -100\\ 100 & 109\end{bmatrix}$,则 $(I+\Gamma D)^{-1}=\begin{bmatrix}1.1 & 1\\ -1 & -0.9\end{bmatrix}$. 该矩阵的谱半径为 0.1,而其通常的矩阵范数皆超过 1,根据以前的结果无法断定该学习控制是否收敛,而据本文给出的结果,此学习控制是收敛的.

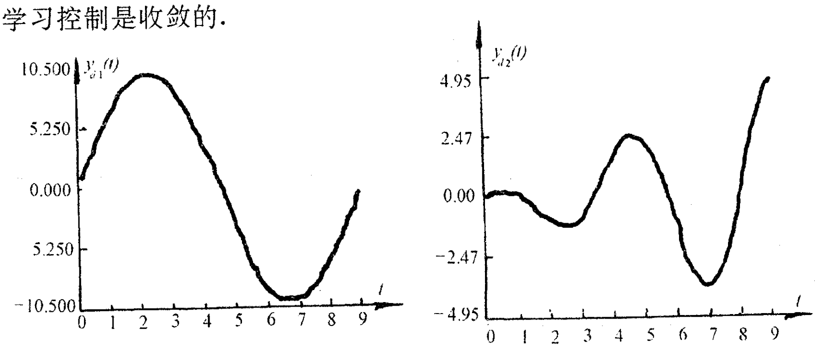

图 1　期望轨迹

我们取初始控制 $\bar{u}_0=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$ 为例进行仿真,图 1 和图 2 分别给出了期望轨迹及误差曲线,由误差曲线可以看出,学习到第十步以后,输出轨迹已经非常接近期望轨迹(误差<0.029).

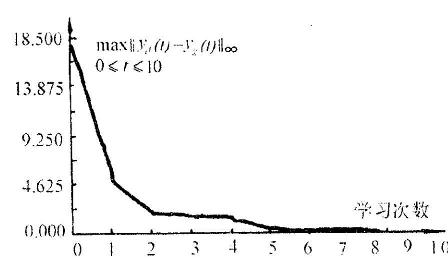

图 2　误差曲线

5　结束语

本文通过对算子方程的深入研究,证明了状态方程为一类非线性方程时运用闭环 P 型学习律时收敛的充分必要条件,该条件弱于已有的收敛条件,但适用范围却比现有文献广泛. 最后的

仿真例子也验证了结论.

参考文献

[1] Arimoto, S., Kawamura, S. and Miyazaki, F.. Learning Control Theory for Dynamical Systems. Proc. 24th Conf. IEEE CDC, Lauderdale, Ft. FL, Dec. 1985, 1357—1380

[2] Hikita, H. and Sytoku, S.. A Repetitive Control System of A Model Following Type. Proc, 28th IEEE CDC, Tampa, Florida, Dec. 1989

[3] John, E. H.. Learning Control for A Class of Nonlinear Systems. Proc, 26th IEEE CDC, Los Angeles, CA, Dec. 1987, 859—860

[4] 林辉，王林，戴冠中. 迭代学习控制中的初始状态问题. 第一届全球华人智能控制与智能自动化大会论文集，北京：科学出版社，1993

[5] Tomizuka, M., Tsao, T. and Chew, K.. Discrete-Time Domain Analysis and Synthesis of Repetitive Controllers. Proc. Armer. Contr. Conf., Atlanta. GA, 1988

[6] 曾南，应行仁. 非线性系统迭代学习算法. 自动化学报，1992，18(2)：168—176

The Convergence of Closed-Loop P-Type Iterative Learning Control of Nonlinear System

LIN Hui

(Department of Automatic Control, Northwestern Polytechnic University · Xi'an, 710072, PRC)

WANG Lin

(Fundamental Department, Xi'an Institute of Posts and Telecommunications · Xi'an, 710061)

Abstract: The convergence of learning algorithm is one of the most important problems in iterative learning control. The necessary and sufficient conditions for the convergence of iterative learning control with closed loop P type algorithm are provided and proved in the case that the state equation of the controlled system is of a general nonlinear form, which shows that the convergence conditions in the nonlinear case are independent of the concrete form of the state equation, just as in the linear case. And what is more, the conditions given in this note are weaker than the known results.

Key words: nonlinear system; convergence; interative learning control; closed loop P type

本文作者简介

林 辉 1957年生. 副教授. 博士. 现任西北工业大学自动控制系副主任. 长期从事控制理论与应用的研究.

王 林 1963年生. 副教授，硕士. 曾任西北工业大学学术委员会委员. 长期从事泛函分析以及控制理论方面的研究.