

控制受限情况下变结构系统的全局稳定性

李文林

(河南师范大学数学系·新乡, 453002)

摘要: 本文指出了滑动模态到达条件 $s\dot{s} < 0$ 的局限性, 用新的方法研究了控制受限情况下变结构控制的全局稳定性, 给出了变结构控制实现的新条件, 并由此条件考虑了用非线性切换函数提高运动快速性的问题.

关键词: 变结构控制; 滑动模态; 切换函数; 稳定性

1 引言

滑动模态吸引区和系统的稳定区是变结构控制研究中的两个重要问题, 研究这两个问题的主要方法是常规的到达条件 $s\dot{s} < 0$ ^[1~5]. 但是, 不难发现这个条件有其一定的局限性, 特别在控制受限情况下, 这个条件往往不能有效地确定滑动模态吸引区和系统的稳定区, 影响变结构控制的应用.

先考虑控制增益受限的情况, 设系统模型为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= a_1x_1 + a_2x_2 + bu, \quad b > 0. \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{允许控制为 } u \in \text{扇形区 } \{-k, k\} = \{u \mid -k|x_1| \leq u \leq k|x_1|\}. \quad (2)$$

$$\text{切换函数为 } s(x) = cx_1 + x_2, \quad c > 0. \quad (3)$$

$$\text{滑动流形为 } S_0 = \{x \mid s(x) = 0\}.$$

$$\text{考虑到稳定性的需要, 设 } 0 < a_2c + c^2 - a_1 < k. \quad (4)$$

按照通常的到达条件 $s\dot{s} < 0$, 系统(1)~(4)的控制律应为

$$u = \begin{cases} -k|x_1|, & s > 0, \\ k|x_1|, & s < 0. \end{cases} \quad (5)$$

此时

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \begin{cases} (a_2 + c)x_2 + a_1x_1 - bk|x_1|, & s > 0, \\ (a_2 + c)x_2 + a_1x_1 + bk|x_1|, & s < 0, \end{cases} \\ &= (a_2 + c)x_2 + a_1x_1 - bks \operatorname{sign} s |x_1|. \end{aligned} \quad (6)$$

显然 $s\dot{s} < 0$ 成立区是局部的, 用到达条件 $s\dot{s} < 0$ 只能得到系统是局部稳定的结论, 但实际上此系统是全局稳定的.

再考虑控制的大小受限的情况, 设允许控制 $|u| \leq 1$, 则应取

$$u = \begin{cases} -1, & s > 0, \\ 1, & s < 0, \end{cases} \quad (7)$$

* 国家自然科学基金资助研究课题.

本文于1994年4月30日收到, 1994年12月10日收到修改稿.

$$\dot{s} = \begin{cases} (a_2 + c)x_2 + a_1x_1 - b, & s > 0, \\ (a_2 + c)x_2 + a_1x_1 + b, & s < 0. \end{cases} \quad (8)$$

容易看出,此时滑动模态存在区和系统的稳定区都是局部的,即使从区域 $\{x | ss < 0\}$ 内出发的运动,也不一定都能到达滑动模态,所以控制受限时,用条件 $ss < 0$ 确定的滑动模态吸引区和系统的稳定区往往是保守的.

本文给出的新方法,能有效地扩大滑动模态吸引区和系统的稳定范围,减少结论的保守性.

2 滑动模态吸引区和系统的全局稳定性

2.1 控制增益受限情况

引理 1 对于系统(1)~(4),滑动模态存在区为整个切换线 S_0 ,到达条件 $ss < 0$ 成立区为包含 S_0 的扇形区

$$\Omega = \left\{ \frac{-(bk + a_1)}{a_2 + c}, \frac{bk - a_1}{a_2 + c} \right\}.$$

证 由(3),(4)和(6)得

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \text{sign } s \cdot \dot{s} &= \lim_{x_2 \rightarrow -cx} \text{sign } s [(a_2 + c)x_2 + a_1x_1] - bk|x_1| \\ &\leq (|-a_2c - c^2 + a_1| - bk)|x_1| \leq 0. \end{aligned}$$

因此切换线 S_0 附近 $\text{sign } s \cdot \dot{s} < 0$,滑动模态区为整个切换线 S_0 .再利用(6),令 $\dot{s} \leq 0$,到达条件 $ss < 0$ 成立区是包含 S_0 的扇形区 Ω .

定理 1 变结构控制系统(1)~(4)全局渐近稳定.

证 定义分段连续函数(篇幅所限, σ 的导出思想略)

$$\sigma_1 = \begin{cases} 2x_2 - \left(a_2 + \sqrt{a_2^2 - 4(bk - a_1)} \right) x_1, & s > 0, \\ 2x_2 - \left(a_2 - \sqrt{a_2^2 + 4(bk + a_1)} \right) x_1, & s < 0, \end{cases} \quad (9)$$

$$\sigma_2 = \begin{cases} 2x_2 - \left(a_2 + \sqrt{a_2^2 - 4(bk - a_1)} \right) x_1, & s < 0, \\ 2x_2 - \left(a_2 - \sqrt{a_2^2 + 4(bk + a_1)} \right) x_1, & s > 0. \end{cases} \quad (10)$$

容易验证(比较斜率), $\{x | \sigma_1 < 0, \sigma_2 > 0\} \subset \Omega$,

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_1 &= \begin{cases} 2(a_1x_1 + a_2x_2 - bkx_1) - \left(a_2 + \sqrt{a_2^2 - 4(bk - a_1)} \right) x_2, & \sigma_1^1 \geq 0, \\ 2(a_1x_1 + a_2x_2 + bkx_1) - \left(a_2 - \sqrt{a_2^2 + 4(bk + a_1)} \right) x_2, & \sigma_1^2 < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \left(a_2 - \sqrt{a_2^2 - 4(bk - a_1)} \right) x_2 + 2(a_1x_1 - bkx_1), & \sigma_1^1 > 0, \\ \left(a_2 + \sqrt{a_2^2 - 4(bk + a_1)} \right) x_2 + 2(a_1 + bk)x_1, & \sigma_1^2 < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\leq \begin{cases} \frac{1}{2} \left(a_2 - \sqrt{a_2^2 - 4(bk - a_1)} \right) \left(a_2 + \sqrt{a_2^2 - 4(bk - a_1)} \right) x_1 \\ \quad + 2(a_1 - bk)x_1 = 0, \quad \sigma_1^1 \geq 0, \\ \frac{1}{2} \left(a_2 + \sqrt{a_2^2 + 4(bk + a_1)} \right) \left(a_2 - \sqrt{a_2^2 + 4(bk + a_1)} \right) x_1 \\ \quad + 2(a_1 + bk)x_1 = 0, \quad \sigma_1^2 < 0. \end{cases}$$

因此,区域 $\{\sigma_1 \geq 0\}$ 内出发的运动,都将进入区域 $\{\sigma_1 < 0\}$. 用同样推导,区域 $\{\sigma_2 \leq 0\}$ 内出发的运动,都将进入区域 $\{\sigma_2 > 0\}$. 注意, $\{x | \sigma_1 < 0, \sigma_2 > 0\} \subset \{x | ss < 0\}$ 和滑动模态渐近稳定,于是系统(1)~(4)全局渐近稳定.

2.2 控制大小受限情况

定义分段光滑连续函数:

$$\sigma_1 = \begin{cases} \dot{s} = a_1 x_1 + (a_2 + c)x_2 - b, & s > 0, \\ -Wx_1 - b, & s > 0, \end{cases} \quad (11)$$

$$\sigma_2 = \begin{cases} \dot{s} = a_1 x_1 + (a_2 + c)x_2 + b, & s < 0, \\ -Wx_1 + b, & s < 0. \end{cases} \quad (12)$$

这里 $W = a_1 - c(a_2 + c)$.

引理 2 i) 如果 $W \neq 0$, 滑动模态区是局部的. 记 $\sigma_1^1 = 0, \sigma_2^1 = 0$ 和切换线 S_0 的交点分别为 A, B , 则 S_0 上的 AB 段是滑动模态区.

$$\text{ii) } \{\sigma_1^2 > 0\} = \{s > 0, Wx_1 < -b\};$$

$$\{\sigma_2^2 < 0\} = \{s < 0, Wx_1 > b\}.$$

证 i) 解 $\begin{cases} \sigma_1^1 = 0 \\ s = 0 \end{cases}, \begin{cases} \sigma_2^1 = 0 \\ s = 0 \end{cases}$, 并由 $W \neq 0$ 可得

A, B 的坐标为:

$$A\left(\frac{b}{W}, -\frac{bc}{W}\right), \quad B\left(-\frac{b}{W}, \frac{bc}{W}\right).$$

注意在 AB 上 $|x_1| \leq \left|\frac{b}{W}\right|$, 于是

$$\begin{aligned} & \lim_{s \rightarrow 0} \text{sign } s \cdot \dot{s} \\ &= \text{sign } s \lim_{x_2 \rightarrow -cx_1} a_1 x_1 + (a_2 + c)x_2 - \text{sign } s \cdot b \\ &\leq |Wx_1| - b = \left|W \frac{b}{W}\right| - b = 0. \end{aligned}$$

因此 AB 段为滑动模态区.

ii) 由 σ_1 和 σ_2 的定义即可验证.

引理 3 i) $|W|$ 变小, 滑动模态区变大, $W \rightarrow 0$ 时滑动模态区变成整个切换线.

ii) $\sigma_1 = 0$ 和 $\sigma_2 = 0$ 所夹的区域 $\subset \{\sigma_1 < 0, \sigma_2 > 0, ss < 0\}$.

证 i) 可由 A, B 的坐标得出; ii) 可由 σ_1, σ_2 的表达式导出.

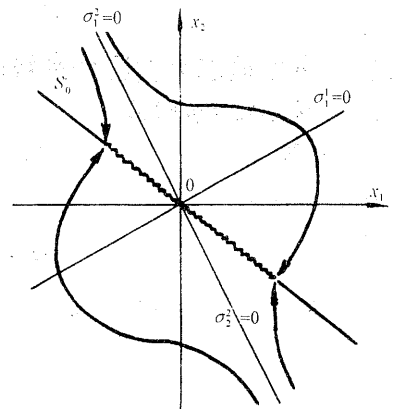


图1 控制增益受限情况系统的运动轨线

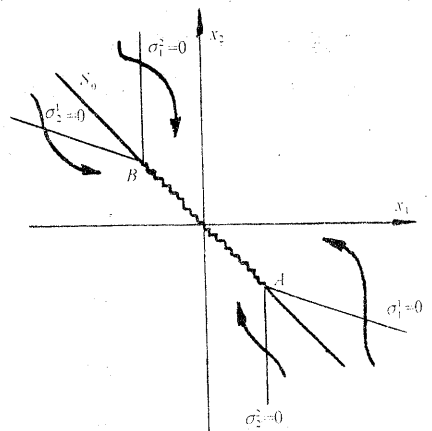


图2 滑动模态吸引区

定理 2 i) 如果 $a_1 < 0, W = 0$, 滑动模态吸引区为全空间; $a_1 > 0, W = 0$, 滑动模态区为 $\sigma_1^{(1)} = 0, \sigma_2^{(1)} = 0$ 所夹的带形区, 此时 $\sigma_1^1 = 0, \sigma_2^1 = 0$ 和 S_0 平行;

ii) $a_1 < 0, W \geq 0$ 时, 系统(1)~(4)全局渐近稳定.

证 i) 由

$$W = 0 \Rightarrow \frac{a_1}{a_2 + c} = c > 0, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \begin{cases} a_1 x_1 + (a_2 + c)x_2 - b, & s > 0, \\ a_1 x_1 + (a_2 + c)x_2 + b, & s < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} (a_2 + c) \left(\frac{a_1}{a_2 + c} x_1 + x_2 \right) - b, & s > 0, \\ (a_2 + c) \left(\frac{a_1}{a_2 + c} x_1 + x_2 \right) + b, & s < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} (a_2 + c)s - b, & s > 0, \\ (a_2 + c)s + b, & s < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

由(13), $a_1 < 0$ 时 $a_2 + c < 0$, 得

$$\dot{s} \begin{cases} \leq -b < 0, & s > 0, \\ \geq b > 0, & s < 0. \end{cases}$$

到达条件 $\dot{s} < 0$ 全空间成立, 因此滑动模态吸引区为全空间.

如果 $a_1 > 0, W = 0$, 则 $a_2 + c > 0$, 解

$$\dot{s} = \begin{cases} (a_2 + c)s - b \leq 0, & s > 0, \\ (a_2 - c)s + b \geq 0, & s < 0. \end{cases}$$

得 $\dot{s} < 0$ 成立区域为一带形区:

$$-\frac{b}{a_2 + c} \leq s \leq \frac{b}{a_2 + c}.$$

将 $s = cx_1 + x_2$ 代入上式知, 这恰是 $\sigma_1^1 = 0$ 和 $\sigma_2^1 = 0$ 所夹的带形区.

ii) 由 $a_1 < 0, W > 0$ 得 $a_2 < 0$.

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \begin{cases} a_1 x_1 + (a_2 + c)x_2 - b, & s > 0, \\ -Wx_1 - b, & s < 0. \end{cases} \\ \dot{\sigma}_1 &= \begin{cases} a_2[a_1 x_1 + (a_2 + c)x_2 - b] + a_1(cx_1 + x_2) - bc, & s > 0, \\ -Wx_2, & s < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} a_2 s + a_2 \dot{s} - bc, & s > 0, \\ -Wx_2, & s < 0 \end{cases} \\ \dot{\sigma} &< \begin{cases} -bc < 0, & \sigma_1^1 \geq 0, \\ -bc < 0, & \sigma_1^2 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

即 $\sigma_1 \geq 0$ 时, $\dot{\sigma}_1 < 0$. 同样可证 $\sigma_2 < 0$ 时, $\dot{\sigma}_2 > 0$.

因此, 系统(1)~(4)任意点出发的运动都将在有限时间内进入区域: $\{\sigma_1 < 0, \sigma_2 > 0\} \subset \{\dot{s} < 0\}$, 并到达滑动模态区 AB , 沿 AB 指数速率 $e^{-\alpha}$ 趋近原点.

由定理 1 和定理 2 可得下面结论:

定理 3 定义分段连续函数

$$\sigma_1 = \begin{cases} \dot{s}, & s > 0, \\ \sigma_1^2, & s < 0, \end{cases}, \quad \sigma_2 = \begin{cases} \dot{s}, & s < 0, \\ \sigma_2^2, & s > 0. \end{cases}$$

如果 i) 原点 $\in \{\sigma_1 < 0, \sigma_2 > 0\} \subset \{s\dot{s} < 0\}$;

ii) $\sigma_1 > 0$ 时, $\dot{\sigma}_1 < 0$, $\sigma_2 < 0$ 时, $\dot{\sigma}_2 > 0$;

则变结构控制系统(1)和(3)全局稳定.

3 利用非线性切换函数的变结构控制

前面研究了变结构控制系统的全局稳定性,但是没有考虑运动的快速性.因为按前面的设计,滑动模态是指数稳定的,而且切换函数中的 c 较大时,滑动模态吸引区可能很小,甚至会破坏系统的稳定性,限制了运动的速度.我们用上面方法和非线性切换函数来解决这个问题.

为了减少篇幅,我们用系统(1)的特殊情况($a_1 = a_2 = 0$):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = bu, \quad -1 \leq u \leq 1. \end{cases} \quad (14)$$

来说明方法的应用.以非线性切换函数

$$s = \begin{cases} bx_1 - x_2^2, & x_2 < 0 \text{ 时}, \\ bx_1 + x_2^2, & x_2 > 0 \text{ 时}. \end{cases}$$

$$\text{令 } s = \begin{cases} bx_1 - x_2^2 = 0, & x_2 < 0 \text{ 时}, \\ bx_1 + x_2^2 = 0, & x_2 > 0 \text{ 时}. \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} \sqrt{bx_1} + \dot{x}_1 = 0, & x_2 < 0, \\ \sqrt{-bx_1} + \dot{x}_1 = 0, & x_2 > 0. \end{cases}$$

解此方程得

$$2\sqrt{|x_1|} = 2\sqrt{|2x_1(0)|} - \sqrt{b}t.$$

因此,滑动模态(如果存在的话)是稳定的,且到达原

点的时间不超过 $2\sqrt{\frac{|x_1(0)|}{b}}$,这显然比 e^{-ct} 趋于零的速度快.

取变结构控制律为 $u = \begin{cases} -1, & s > 0 \text{ 时}, \\ 1, & s < 0 \text{ 时}, \end{cases}$

$$\begin{aligned} s\dot{s} &= \begin{cases} s(b\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2), & x_2 > 0, \\ s(b\dot{x}_1 - 2x_2\dot{x}_2), & x_2 < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} s(bx_2 - 2bx_2), & sx_2 > 0, \\ s(bx_2 + 2bx_2), & s < 0, \quad sx_2 < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

除 x_1 轴外,到达条件 $s\dot{s} < 0$ 皆成立,滑动模态区为整个切换线.

取分段连续函数

$$\sigma_1 = \begin{cases} \dot{s} = 3bx_2, & s > 0, \\ x_2^2 - 2bx_1, & s < 0, \end{cases}, \quad \sigma_2 = \begin{cases} 3bx_2, & s < 0, \\ x_2^2 + 2bx_1, & s > 0. \end{cases}$$

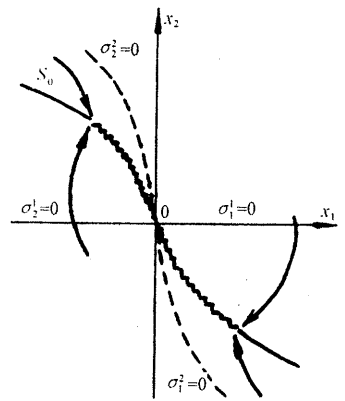


图 3 非线性切换函数情况

则得

$$S_0 \subset \{\sigma_1 < 0, \sigma_2 > 0\} \subset \{s\dot{s} < 0\}.$$

$$\dot{\sigma}_1 = \begin{cases} -3b^2, & s > 0, \\ 0, & s < 0, \end{cases} \quad \dot{\sigma}_2 = \begin{cases} 3b^2, & s < 0, \\ 0, & s > 0. \end{cases}$$

即定理 3 的条件成立, 系统全局稳定.

4 结 论

本文给出了扩大滑动模态吸引区和系统稳定区的新方法, 为变结构控制系统的设计和分析提供了新的思路. 此方法能有效地减少保守性, 甚至把常规到达条件判断是局部稳定的问题, 变成全局稳定, 并能用于非线性切换函数的情况. 如何把这种方法推广到多输出变结构控制系统, 有待进一步研究.

参 考 文 献

- [1] Utkin V. I. . Equations of Sliding Mode in Discontinuous Systems. Automation and Remote Control, 1971, 1(12): 1897—1907; 1972, 2(2): 211—219
- [2] Sira-Ramirez H. . Structure at Infinity, Zero Dynamics and Normal Forms of Systems Under Sliding Motions. Int. J. Sys. Sci. , 1990, 21(4): 665—667
- [3] Utkin V. I. . Variable Structure Systems with Sliding Mode. IEEE Trans. Automat. Contr. , 1977, AC-21(2): 212—222
- [4] 苏春翌, 周其节. 变结构控制的理论及应用. 控制理论与应用, 1990, 7(3): 1—11
- [5] 高为炳. 变结构控制理论基础. 北京: 科技出版社出版, 1990, 1993

Global Stability of Variable Structure Control Systems under Restrained Control

LI Wenlin

(Department of Mathematics, Henan Normal University • Xinxiang, 453002, PRC)

Abstract: In this paper, limitation of the reaching condition of sliding mode $s\dot{s} < 0$ is pointed out. With a new method the stability of variable structure control systems under restrained control are studied. Then a new implementation condition is presented. By this condition a nonlinear switching function for speeding up the response of motion is considered.

Key words: variable structure control; sliding mode; switching function; stability

本文作者简介

李文林 1949 年生. 1982 年毕业于山东师范大学数学系, 获硕士学位. 毕业后在河南师范大学数学系任教, 1993 年在北京航空航天大学获博士学位. 目前研究领域为非线性控制和变结构控制.