第 13 卷第 1 期
1996 年 2 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 13, No. 1
Feb., 1996

离散时间系统容错控制

黄献青　瞿　坦　陈锦江

（华中理工大学自动控制系·武汉，430074）

摘要：本文讨论了离散时间系统容错控制问题，给出了一些充分条件，并用实例作了说明.

关键词：离散时间系统；容错性；Schur 稳定；μ- 理论.

1　引　　言

目前，用 Riccati 方程或 Lyapunov 方程研究容错控制问题引起广泛兴趣[1,2]，但大多数文献是在讨论连续时间系统，对于离散时间系统，文[2]讨论了传感器失效的容错控制. 实际工作中，同样存在着执行器失效的情形，但文献中却少有讨论. 本文基于文[1]中处理连续系统的方法，对离散时间系统容错控制问题进行了研究，给出了充分条件，并与鲁棒控制理论中的 μ-理论建立了联系，文章最后用实例作了解释.

2　主要结果

考虑线性时不变离散时间系统

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k). \tag{1}$$

其中　$x(k) \in \mathrm{R}^n$，　$u(k) \in \mathrm{R}^m$，　$A \in \mathrm{R}^{n\times n}$，　$B \in \mathrm{R}^{n\times m}$.

设反馈控制取为　$u(k) = -Fx(k)$.　(2)

由此构成的闭环系统为　$x(k+1) = Ax(k) - BFx(k)$.　(3)

但当执行器失效，失效矩阵为 L 时，系统(3)变化为

$$x(k+1) = Ax(k) - BLFx(k). \tag{4}$$

参见图 1. 其中，失效阵 L 定义如下

$$L = \mathrm{diag}\ \{l_1, l_2, \cdots, l_n\},$$

$$l_i = \begin{cases} 0, & \text{当第 } i \text{ 个执行器失效时；} \\ 1, & \text{当第 } i \text{ 个执行器正常运转时.} \end{cases}$$

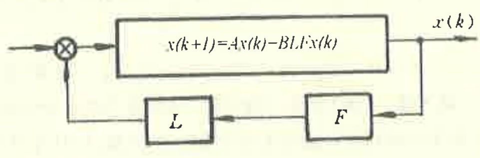

图 1　执行器失效的反馈控制系统

引理 1　考虑线性系统(1)及以下 Lyapunov 方程

$$A^{\mathrm{T}}PA - P + Q = 0. \tag{5}$$

假设 A 是 Schur 渐近稳定的，$Q \geqslant 0$ 为半正定阵，那么存在对称矩阵 P，$P \geqslant 0$ 满足(5)式[1]，若应用状态反馈控制

$$u(k) = -\gamma(B^{\mathrm{T}}PB + R)^{-1}B^{\mathrm{T}}PAx(k). \tag{6}$$

设 $(I - \gamma(B^{\mathrm{T}}PB + R)^{-1}B^{\mathrm{T}}P)^{-1}$ 存在，$2(B^{\mathrm{T}}PB + R) - \gamma B^{\mathrm{T}}PB > 0$，则闭环系统

$$x(k) = (A - \gamma B(B^{\mathrm{T}}PB + R)^{-1}B^{\mathrm{T}}PA)x(k) \tag{7}$$

本文于 1994 年 12 月 5 日收到. 1995 年 6 月 10 日收到修改稿.

是 Schur 渐近稳定的，且(6)是如下指标意义下的最优控制

$$J(x_0,u)=\sum_{k=0}^{\infty}[x(k)^{\mathrm{T}}(Q+\gamma^2A^{\mathrm{T}}PB(B^{\mathrm{T}}PB+R)^{-1}B^{\mathrm{T}}PA)x(k)+u^{\mathrm{T}}(k)Ru(k)].$$

证 记 $\tilde{A}=A-\gamma B(B^{\mathrm{T}}PB+R)^{-1}B^{\mathrm{T}}PA$.

由假设条件 $$A=(I-\gamma B(B^{\mathrm{T}}PB+R)^{-1}B^{\mathrm{T}}P)^{-1}\tilde{A} \tag{8}$$

代入(5)式

$$\tilde{A}^{\mathrm{T}}(I-\gamma PB(B^{\mathrm{T}}PB+R)^{-1}B^{\mathrm{T}})^{-1}P(I-\gamma B(B^{\mathrm{T}}PB+R)^{-1}B^{\mathrm{T}}P)^{-1}\tilde{A}-P+Q=0. \tag{9}$$

反证 设 $\tilde{A}$ 有一特征根 $\lambda,|\lambda|\geqslant 1$，对应的特征向量为 ξ. 在(9)式两边左乘 $\bar{\xi}^{\mathrm{T}}$，右乘 ξ

$$\bar{\lambda}\lambda\bar{\xi}^{\mathrm{T}}(I-\gamma PB(B^{\mathrm{T}}PB+R)^{-1}B^{\mathrm{T}})^{-1}P(I-\gamma B(B^{\mathrm{T}}PB+R)^{-1}B^{\mathrm{T}}P)^{-1}\xi$$
$$-\bar{\xi}^{\mathrm{T}}P\xi+\bar{\xi}^{\mathrm{T}}Q\xi=0.$$

令 $$\eta=(I-\gamma B(B^{\mathrm{T}}PB+R)^{-1}B^{\mathrm{T}}P)^{-1}\xi,$$

则 $$\bar{\lambda}\lambda\bar{\eta}^{\mathrm{T}}P\eta-\bar{\eta}^{\mathrm{T}}(I-\gamma PB(B^{\mathrm{T}}PB+R)^{-1}B^{\mathrm{T}})P(I-\gamma B(B^{\mathrm{T}}PB+R)^{-1}B^{\mathrm{T}}P)\eta$$
$$+\bar{\xi}^{\mathrm{T}}Q\xi=0. \tag{10}$$

但是

$$\bar{\lambda}\lambda P-(I-\gamma PB(B^{\mathrm{T}}PB+R)^{-1}B^{\mathrm{T}})P(I-\gamma B(B^{\mathrm{T}}PB+R)^{-1}B^{\mathrm{T}}P)$$
$$\geqslant P-P+2\gamma PB(B^{\mathrm{T}}PB+R)^{-1}B^{\mathrm{T}}P-\gamma^2PB)(B^{\mathrm{T}}PB+R)^{-1}B^{\mathrm{T}}PB(B^{\mathrm{T}}PB+R)^{-1}B^{\mathrm{T}}P$$
$$=PB(B^{\mathrm{T}}PB+R)^{-1}(2\gamma(B^{\mathrm{T}}PB+R)-\gamma^2B^{\mathrm{T}}PB)(B^{\mathrm{T}}PB+R)^{-1}B^{\mathrm{T}}P.$$

而 $2\gamma(B^{\mathrm{T}}PB+R)-\gamma^2B^{\mathrm{T}}PB>0$，故上式为半正定矩阵. 参考(10)式，可得

$$(2\gamma(B^{\mathrm{T}}PB+R)-\gamma^2B^{\mathrm{T}}PB)(B^{\mathrm{T}}PB+R)^{-1}B^{\mathrm{T}}P\eta=0.$$

从而 $$B^{\mathrm{T}}P\eta=0.$$

由(8)式 $$A\xi=\lambda\eta,$$
$$\lambda\xi=\tilde{A}\xi=[I-\gamma B(B^{\mathrm{T}}PB+R)^{-1}B^{\mathrm{T}}P]A\xi$$
$$=A\xi-\gamma B(B^{\mathrm{T}}PB+R)^{-1}B^{\mathrm{T}}P\lambda\eta=A\xi.$$

故 λ 是 A 的特征根. 因 $|\lambda|\geqslant 1$，所以 A 不稳定，与假设矛盾，从而闭环系统 Schur 渐近稳定.

下证(6)是最优控制.

由前述知，当 $k\to+\infty,x(k)\to 0$，所以

$$x_0^{\mathrm{T}}Px_0=\sum_{k=0}^{\infty}[x^{\mathrm{T}}(k)Px(k)-x^{\mathrm{T}}(k+1)Px(k+1)]$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}(x^{\mathrm{T}}(k)Px(k)-(Ax(k)+Bu(k))^{\mathrm{T}}P(Ax(k)+Bu(k))]$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}[(x^{\mathrm{T}}(k)Qx(k)+x^{\mathrm{T}}(k)\gamma^2A^{\mathrm{T}}PB(B^{\mathrm{T}}PB+R)^{-1}B^{\mathrm{T}}PAx(k)+u^{\mathrm{T}}(k)Ru(k))$$
$$-(u(k)+\gamma(B^{\mathrm{T}}PB+R)^{-1}B^{\mathrm{T}}PAx(k))^{\mathrm{T}}(R+B^{\mathrm{T}}PB)$$
$$\cdot(u(k)+\gamma(B^{\mathrm{T}}PB+R)^{-1}B^{\mathrm{T}}PAx(k))]$$
$$=J(x_0,u)-(u(k)+\gamma(B^{\mathrm{T}}PB+R)^{-1}B^{\mathrm{T}}PAx(k))^{\mathrm{T}}(R+B^{\mathrm{T}}PB)$$
$$\cdot(u(k)+\gamma(B^{\mathrm{T}}PB+R)^{-1}B^{\mathrm{T}}PAx(k))].$$

所以 $J(x_0,u)\geqslant x_0^{\mathrm{T}}Px_0$，当且仅当

$$u(k)=-\gamma(B^{\mathrm{T}}PB+R)^{-1}B^{\mathrm{T}}PAx(k)$$

时不等式取等号.而上式就是(6)式,(6)是最优控制. 证毕.

类似地,可以得到

引理 2 对系统(1)及Lyapunov方程(5),若取控制

$$u(k)=-\gamma B^{\mathrm{T}}PAx(k), \tag{11}$$

则存在$\gamma>0$,使闭环系统

$$x(k+1)=(A-\gamma BB^{\mathrm{T}}PA)x(k)$$

Schur渐近稳定,且反馈控制(11)是以下二次性能指标意义下的最优控制

$$J(x_0,u)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[x^{\mathrm{T}}(k)(Q+\gamma A^{\mathrm{T}}PBB^{\mathrm{T}}PA)x(k)+u^{\mathrm{T}}(k)\left(\frac{1}{\gamma}I-B^{\mathrm{T}}PB\right)u(k)\right].$$

定理 1 考虑系统(1),取反馈控制为

$$u(k)=-\gamma B^{\mathrm{T}}PAx(k).$$

其中P为Lyapunov方程(5)的半正定解.若执行器失效,且失效阵为L,则系统(1)变化为

$$x(k+1)=Ax(k)+BLu(k). \tag{6'}$$

假设对任何失效阵L,$(I-\gamma BLB^{\mathrm{T}}P)^{-1}$存在,另外,$2I-\gamma B^{\mathrm{T}}PB>0$,则(6′)在$A$ Schur渐近稳定时亦渐近稳定,即闭环系统具有容错特性.

注 若取$\gamma<1/(\|B\|^2\|P\|)$,则定理1的条件满足,从而可以设计出具有容错特性的控制系统.

下面我们用矩阵的最大奇异值、μ值给出系统具有容错特性的充分条件.由于矩阵的这两个函数在鲁棒控制理论中得到深入研究[3,5],因而下面的命题是有价值的.

定理 2 在系统(1)中,假设 $\mu(A)<1$,

且对任何失效阵L

$$\sigma_{\max}(I-\gamma BL(B^{\mathrm{T}}PB+R)^{-1}B^{\mathrm{T}}P)\leqslant 1 \tag{12}$$

$$(\sigma_{\max}(I-\gamma BLB^{\mathrm{T}}P)\leqslant 1),$$

则闭环系统

$$x(k+1)=(A-\gamma BL(B^{\mathrm{T}}PB+R)^{-1}B^{\mathrm{T}}PA)x(k).$$

$$(x(k+1)=(A-\gamma BLB^{\mathrm{T}}PA)x(k))$$

Schur渐近稳定,即系统具有容错特性.这里$\rho(\cdot)$,$\sigma_{\max}(\cdot)$,$\mu(\cdot)$分别代表矩阵的谱半径,最大奇异值及μ值.

证 由文[3] $\rho(AB)\leqslant\mu(AB)\leqslant\sigma_{\max}(A)\mu(B)$

分别用$I-\gamma BL(B^{\mathrm{T}}PB+R)^{-1}B^{\mathrm{T}}P$(或$I-\gamma BLB^{\mathrm{T}}P$),$A$代替上式中的$A$,$B$即可证明此命题.

比容错性(完整性)更精确的提法是特征值扰动不变性.对此,我们有

引理 3 设以下Riccati方程

$$P=P^{\mathrm{T}}PA+Q-PB(B^{\mathrm{T}}PB+R)^{-1}B^{\mathrm{T}}P \tag{13}$$

有一半正定解$P\geqslant0$,其中$Q\geqslant0$,$R\geqslant0$,设ξ是A的特征向量,对应的特征值为λ,$|\lambda|<1$,

则若 $$Q\xi=0,$$

必有 $$P\xi=0.$$

证 用反证法.在(13)式两边左乘ξ^{T},右乘ξ,

$$\xi^{\mathrm{T}}P\xi=\bar{\lambda}\lambda\xi^{\mathrm{T}}P\xi+\xi^{\mathrm{T}}Q\xi-\xi^{\mathrm{T}}PB(B^{\mathrm{T}}PB+R)^{-1}B^{\mathrm{T}}P\xi,$$

$$(1-\bar{\lambda}\lambda)\bar{\xi}^{\mathrm{T}}P\xi=-\bar{\xi}^{\mathrm{T}}PB(B^{\mathrm{T}}PB+R)^{-1}B^{\mathrm{T}}P\xi.$$

由于 $1-\bar{\lambda}\lambda>0$,若 $P\xi\neq 0$,则上式左边是正数,而右边为负数或零,矛盾.故 $P\xi=0$.　证毕.

注 2　引理 3 对 P 满足 Lyapunov 方程(5)时,亦是成立的.

定理 3　设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_t$ 是矩阵 A 的特征向量,对应的特征根为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_t$,$|\lambda_i|<1$,$i=1,2,\cdots,t$. 若 $Q\xi_i=0$,$i=1,2,\cdots,t$,则 A 与 $A-\gamma BL(B^{\mathrm{T}}PB+R)^{-1}B^{\mathrm{T}}PA$(或 $A-\gamma BLB^{\mathrm{T}}PA$)有相同的特征根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_t$.

证
$$\begin{aligned}&(A-\gamma BL(B^{\mathrm{T}}PB+R)^{-1}B^{\mathrm{T}}PA)\xi_i\\&=A\xi_i-\gamma BL(B^{\mathrm{T}}PB+R)^{-1}B^{\mathrm{T}}P\lambda_i\xi_i\\&=A\xi_i=\lambda_i\xi_i.\end{aligned}$$

因此证得.

3　算　例

取
$$A=\begin{pmatrix}0.5&1\\0&0.5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix}3&-2\\-2&2\end{pmatrix},$$

则由 Lyapunov 方程(5)得
$$A=\begin{pmatrix}4&0\\0&8\end{pmatrix}.$$

由定理 1 的注 1,可取 $\gamma\leqslant\dfrac{1}{\|B\|_1^2\|P\|_1}=\dfrac{1}{32}$,,此时反馈控制
$$u(k)=-\gamma B^{\mathrm{T}}PAx(k),$$
可使闭环系统
$$x(k+1)=Ax(k)+BLu(k)$$
渐近稳定,从而具有容错特性.

事实上,对于不同的失效情形,闭环系统矩阵 $A-\gamma BLB^{\mathrm{T}}PA$ 为

$$A-\gamma BLB^{\mathrm{T}}PA=\begin{cases}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}-2\gamma&1-8\gamma\\-2\gamma&\frac{1}{2}-12\gamma\end{bmatrix},&\text{当 }L=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\text{ 时};\\[2ex]\begin{bmatrix}\frac{1}{2}-2\gamma&1-8\gamma\\-2\gamma&\frac{1}{2}-8\gamma\end{bmatrix},&\text{当 }L=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\text{ 时};\\[2ex]\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&1\\0&\frac{1}{2}-4\gamma\end{bmatrix},&\text{当 }L=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\text{ 时};\\[2ex]\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&1\\0&\frac{1}{2}\end{bmatrix},&\text{当 }L=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\text{ 时};\end{cases}$$

前二个矩阵的渐近稳定性可参见文[4],而后二个矩阵的渐近稳定性可直接求其特征值加以

验证.

参考文献

[1] Shieh,L. S. et al.. Optimal Pole-Placement for State-Feedabck Systems Possessing Integrity. Int. J. Systems Sci., 1988,19(8):1419—1435

[2] Huang Sunan and Shao Huihe. A Design Method for Control Systems Possessing Integrity. 控制理论与应用,1994,11(2):161—167

[3] Doyle,J.. Analysis of Feedback Systems with Structured Uncertainties. IEE Proc. Part D,1982,129(6):242—250

[4] 李训经,孙莱祥,陈有根. 计算机应用中的控制理论. 上海:复旦大学出版社,1987,193—233

[5] Packard,A. and Doyle,J.. The Complex Structured Singular Value. Automatica,1993,29(1):71—110

Fault-Tolerant Control for Discrete Time Systems

HUANG Xianqing, QU Tan and CHEN Jinjiang

(Department of Automatic Control Engineering,

Huazhong University of Science & Technology · Wuhan,430074,PRC)

Abstract: In this paper ,we discuss the fault-tolerant control problem for discrete time linear systems,and obtain several sufficient conditions for it. In the end,we illustrate our results by an example.

Key words: discrete time systems; fault-tolerant control; Schur stability; μ-theory

本文作者简介

黄献青 1966年生. 1988年毕业于浙江大学应用数学系,获学士学位,1991年毕业于复旦大学数学系,获硕士学位,现为华中理工大学自动控制系讲师,在职博士生. 目前研究兴趣为容错控制、离散事件动态系统理论.

瞿 坦 1934年生. 1957年毕业于哈尔滨工业大学研究生班,现为华中理工大学自动控制系教授,博士生导师. 研究方向为分布式计算机控制、智能控制及人工神经网络.

陈锦江 1922年生. 1946年毕业于武汉大学电机系,1955年毕业于哈尔滨工业大学研究生班. 现为华中理工大学自动控制系教授,博士生导师. 研究方向为数字控制,机器人控制和机器人视觉、触觉和滑觉.