第13卷第1期
1996年2月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 13, No. 1
Feb., 1996

离散事件系统基于混合状态法的数值分析*

姜胜兵　黄志同

(南京理工大学自动控制系·南京,210094)

摘要：本文在离散事件动态系统混合状态建模的基础上,对系统的积分方程模型进行了数值求解,讨论了数值解法的稳定性与收敛性,最后给出了一个数值计算的实例.并对数值结果进行了仿真验证.

关键词：离散事件动态系统；混合状态；数值分析；排队论

1 引　　言

最近我们提出一种混合状态法[1~3],来研究离散事件动态系统(DEDS),对系统建立了积分方程模型,并进行了性能分析.与传统的排队论以及随机 Petri 网等方法相比,该方法没有许多苛刻的限制,同时便于研究系统的动态特性.但是,用混合状态法分析实际系统时需求解一组积分方程,这组方程一般是很难求解的,这就为进一步的研究增加了困难.为解决这一困难,本文将在混合状态模型的基础上对系统进行数值分析.

2 混合状态建模

设系统的离散状态为$\{q_i, 1\leqslant i\leqslant N\}$,离散事件为$\{e_r, 1\leqslant r\leqslant M\}$,$A_i=\{r\,|\,e_r$ 是状态 q_i 下的使能事件$\}$.系统的混合状态为$\{(q_i,\bar{x}_i)\,|\,\bar{x}_i=(\cdots,x_k,\cdots\},k\in A_i,x_k\in \mathrm{R}^+\}$,系统在混合状态下是一个时齐的马氏过程.令

$$u_i(t,\bar{x}_i)=\sum_{k=1}^{N}\int_{\Omega_k} f_k(\bar{y}_k)P_{ik}(t,\bar{x}_i,\mathrm{d}\bar{y}_k),\quad i=1,2,\cdots,N. \tag{1}$$

其中P_{ik}为系统的转移函数,f_k是Ω_k上有界的β_k可测的实值函数,β_k是Ω_k上的波雷尔域,$\Omega_k=(R^+)^{|A_k|}$.由[1]有

$$\begin{cases} u_i(t,\bar{x}_i)=\displaystyle\prod_{r\in A_i}\frac{1-G_r(x_r+t)}{1-G_r(x_r)}f_i(\bar{x}_i+t)+\int_0^t\prod_{r\in A_i}\frac{1-G_r(x_r+t-\tau)}{1-G_r(x_r)} \\ \qquad\cdot\displaystyle\sum_{r\in A_i}\left[\frac{g_r(x_r+t-\tau)}{1-G_r(x_r+t-\tau)}\sum_{j=1}^{N}p_{ij}(r)u_j(\tau,\bar{x}_j^*)\right]\mathrm{d}\tau, \\ i=1,2,\cdots,N. \end{cases} \tag{2}$$

其中G_r为事件e_r的时延的概率分布,g_r为G_r的密度函数,$p_{ij}(r)$为状态q_i下事件e_r发生后离散状态变为q_j的概率,$\bar{x}_j^*=(\cdots,x_k^*,\cdots\}$,$k\in A_j$,当$k\in C(i,j,r)$时$x_k^*=x_k+t-\tau$,否则$x_k^*=0$,$C(i,j,r)$的意义见[1].系统各种性能指标可通过选取不同的$f_i$由$u_i$求出,具体内容见[2]或[3].

* 国家自然科学基金资助的课题.

本文于1994年9月26日收到,1995年1月27日收到修改稿.

3 数值分析

由转移函数性质及(1)式有

$$\begin{aligned}u_i(T+\Delta t,\bar{x}_i)&=\sum_{k=1}^{N}\int_{\Omega_k}f_k(\bar{y}_k)P_{ik}(T+\Delta t,\bar{x}_i,\mathrm{d}\bar{y}_k)\\&=\sum_{k=1}^{N}\int_{\Omega_k}f_k(\bar{y}_k)\Big[\sum_{j=1}^{N}\int_{\Omega_j}P_{jk}(T,\bar{z}_j,\mathrm{d}\bar{y}_k)P_{ij}(\Delta t,\bar{x}_i,\mathrm{d}\bar{z}_j)\Big]\\&=\sum_{j=1}^{N}\int_{\Omega_j}u_j(T,\bar{z}_j)P_{ij}(\Delta t,\bar{x}_i,\mathrm{d}\bar{z}_j),\quad i=1,2,\cdots,N.\end{aligned}$$

由方程(2)进一步有

$$\begin{cases}W_i(T+\Delta t,\bar{x}_i)=W_i(T,\bar{x}_i+\Delta t)+\displaystyle\sum_{r\in A_i}\sum_{j=1}^{N}\int_0^{\Delta t}p_{ij}(r)g_r(x_r+\Delta t-\tau)\\\qquad\cdot\displaystyle\prod_{k\in B_i}(1-G_k(x_k+\Delta t-\tau))W_j(T+\tau,\bar{x}_j^{\tau})\mathrm{d}\tau,\\W_i(0,\bar{x}_i)=f_i(\bar{x}_i)\displaystyle\prod_{r\in A_i}[1-G_r(x_r)],\quad i=1,2,\cdots,N.\end{cases}\tag{3}$$

其中 $W_i(T,\bar{x}_i)=u_i(T,\bar{x}_i)\prod_{r\in A_i}[1-G_r(x_r)]$, $B_i=A_i\backslash\{r\}\backslash C(i,j,r)$. 把(3)式离散化,并取时间步长与空间步长都为 Δt, $W_i(T,\bar{x}_i)$ 离散后记为 $W_i^n(\bar{h}_i)$,而 $T=n\Delta t$,

$$\bar{x}_i=(\cdots,h_r\Delta t,\cdots),\ \bar{h}_i=(\cdots,h_r,\cdots),\quad r\in A_i,\quad h_r\ 为正整数.$$

由此可得(3)式离散化后的方程如下

$$\begin{cases}W_i^{n+1}(\bar{h}_i)=W_i^n(\bar{h}_i+1)+\displaystyle\sum_{r\in A_i}\sum_{j=1}^{N}p_{ij}(r)g_r((h_r+1)\Delta t)\\\qquad\cdot\displaystyle\prod_{k\in B_i}[1-G_k((h_k+1)\Delta t)]W_j^n(\bar{h}_j^1)\Delta t,\\W_i^0(\bar{h}_i)=f_i(\bar{h}_i\Delta t)\displaystyle\prod_{r\in A_i}[1-G_r(h_r\Delta t)],\quad i=1,2,\cdots,N.\end{cases}\tag{4}$$

其中 $\bar{h}_j^1=(\cdots,h_r^1,\cdots)$, $k\in A_j$,当 $k\in C(i,j,r)$ 时 $h_k^1=h_k+1$,否则 $h_k^1=0$. 由(4)式就可对方程(3)进行数值求解. 下面我们讨论由方程(4)求出的数值解的稳定性与收敛性.

(4)式的计算是按时间层次逐层推进的,计算第 n 层值时的舍入误差必然会影响到第 $n+1$ 层的值,我们希望这种误差传播的影响不至于越来越大,达到掩盖(4)式解的面貌,这就是所谓稳定性问题. 因(4)式是 W_i 的线性方程,由文献[4]可知,方程(4)的解的稳定性可定义为:对一切 $\Delta t\leqslant t_0$, $n\Delta t\leqslant T$,有 $\|W^n\|\leqslant K\|W^0\|$. 其中范数的定义为

$$\|W^n\|\triangleq\max_i\Big\{\cdots\sum_{\substack{h_k=0\\k\in A_i}}^{\infty}\cdots[W_i^n(\bar{h}_i)]^2(\Delta t)^{|A_i|}\Big\}^{\frac{1}{2}}.$$

由(4)式直接有

$$\begin{aligned}\|W^n\|\leqslant&\|W^{n-1}\|\\&+\|W^{n-1}\|\Delta t\max_i\sum_{r\in A_i}\sum_{j=1}^{N}p_{ij}(r)\Big[\sum_{h_r=0}^{\infty}g_r^2(h_k\Delta t)\Delta t\prod_{k\in B_i}\sum_{h_k=0}^{\infty}(1-G_k(h_k\Delta t))^2\Big]^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

$$= \| W^{n-1} \| + \| W^{n-1} \| \Delta t \max_i \sum_{r\in A_i} \sum_{j=1}^{N} p_{ij}(r) \left[\int_0^\infty g_r^2(x)\mathrm{d}x \prod_{k\in B_i} \int_0^\infty (1-G_k(x))^2 \mathrm{d}x \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \| W^{n-1} \| o(\Delta t)$$

$$\leqslant (1 + K_1\Delta t + o(\Delta t)) \| W^{n-1} \|,$$

$$K_1 = M \max_r \left[\int_0^\infty g_r^2(x)\mathrm{d}x \right]^{\frac{1}{2}} \max_i \prod_{k\in B_i} \left[\int_0^\infty (1-G_k(x))^2 \mathrm{d}x \right]^{\frac{1}{2}}.$$

对给定的 K_1，可选取一个 t_0，当 $\Delta t \leqslant t_0$ 时，$o(\Delta t) < K_1\Delta t$，因此当 $\Delta t \leqslant t_0$ 时，有

$$\| W^n \| \leqslant (1 + 2K_1\Delta t) \| W^{n-1} \| \leqslant (1+2K_1\Delta t)^n \| W^0 \|.$$

当 $n\Delta t \leqslant T$ 时，有

$$\| W^n \| \leqslant (1+2K_1\Delta t)^{\frac{T}{\Delta t}} \| W^0 \| \leqslant e^{2K_1T} \| W^0 \|.$$

由此知，当 g_r 和 $1-G_r, r=1,2,\cdots,M$，平方可积时，(4) 式的解是稳定的.

方程(4)还存在一个收敛性问题. 即当步长 Δt 无限缩小时，(4) 式的解是否逼近到(3)式的解. 令

$$\varepsilon^n = \max_i \sup_{\bar{x}_i} | W_i(n\Delta t, \bar{x}_i) - \tilde{W}_i(n\Delta t, \bar{x}_i) |,$$

$$\tilde{W}_i(n\Delta t, \bar{x}_i) = W_i^n(\bar{h}_i), \quad (h_r - 1)\Delta t < x_r \leqslant h_r\Delta t, \quad r\in A_i.$$

W_i 与 W_i^n 分别为(3) 式与(4) 式的解. 方程(4) 的解的收敛性可定义为：对任一固定的 T，$T = n\Delta t$，有 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\varepsilon^n = 0$. 由(3) 式与(4) 式有

$$\varepsilon^n \leqslant \varepsilon_0^n + (1+K_2\Delta t)\varepsilon^{n-1}, \quad \varepsilon^0 = 0.$$

进一步有

$$\varepsilon^n \leqslant \sum_{l=1}^{N} \varepsilon_0^l (1+K_2\Delta t)^{n-l}.$$

其中

$$K_2 = M \max_r \sup_x g_r(x),$$

$$\varepsilon_0^l = \max_i \sup_{\bar{x}_i} \sum_{r\in A_i} \sum_{j=1}^{N} p_{ij}(r)$$

$$\cdot \int_0^{\Delta t} \Big| g_r(x_r + \Delta t - \tau) \prod_{k\in B_i} [1 - G_k(x_k + \Delta t - \tau)] W_j((l-1)\Delta t + \tau, \bar{x}_j^*)$$

$$- g_r(x_r+\Delta t) \prod_{k\in B_i} [1 - G_k(x_k + \Delta t)] W_j((l-1)\Delta t, \bar{x}_j^*) \Big| \mathrm{d}\tau.$$

因 $l\Delta t \leqslant T$，而在闭区间上的连续为一致连续，因此 ε_0^l 的表达式中的绝对值，当 τ 趋于零时，对 l 一致地趋于零，也就是说所有的 $\varepsilon_0^l, l\Delta t \leqslant T$，对 l 一致地为 $o(\Delta t)$，即对任意小的 $\varepsilon > 0$，存在 δ，当 $\Delta t \leqslant \delta$ 时，对所有的 $\varepsilon_0^l, l\Delta t \leqslant T$，有 $\varepsilon_0^l < \varepsilon\Delta t$，进一步有

$$\varepsilon^n < \varepsilon\Delta t \frac{(1+K_2\Delta t)^n - 1}{K_2\Delta t} < \varepsilon \frac{e^{K_2T} - 1}{K_2}.$$

因此 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\varepsilon^n = 0$，即(4) 式的数值解是收敛的.

4　应用举例

本节中我们应用上一节提出的数值方法来求解 $GI/G/1/2$ 系统的忙期分布. 由文献[2]

或[3]可知，系统的忙期分布为图1含吸收态 q_0 的系统从混合状态 $(q_1, x_1=0, x_2=0)$ 出发到达吸收态 q_0 的时间分布，其中状态 q_i 表示系统中有 i 个顾客，事件 e_1 和 e_2 分别表示顾客到达与被服务完离去，对上述系统由方程(3)有

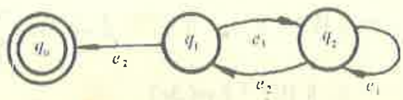

图1　含吸收态的系统

$$
\begin{cases}
W_0(T+\Delta t) = W_0(T), \\
W_1(T+\Delta t, x_1, x_2) = W_1(T, x_1+\Delta t, x_2+\Delta t) \\
\qquad + \int_0^{+\Delta t} g_1(x_1+\Delta t-\tau) W_2(T+\tau, 0, x_2+\Delta t-\tau)\mathrm{d}\tau \\
\qquad + \int_0^{+\Delta t} [1-G_1(x_1+\Delta t-\tau)] g_2(x_2+\Delta t-\tau) W_0(T+\tau)\mathrm{d}\tau, \\
W_2(T+\Delta t, x_1, x_2) = W_2(T, x_1+\Delta t, x_2+\Delta t) \\
\qquad + \int_0^{+\Delta t} g_1(x_1+\Delta t-\tau) W_2(T+\tau, 0, x_2+\Delta t-\tau)\mathrm{d}\tau \\
\qquad + \int_0^{+\Delta t} g_2(x_2+\Delta t-\tau)] W_1(T+\tau, x_1+\Delta t-\tau, 0)\mathrm{d}\tau, \\
W_0(0) = f_0, \quad W_i(0, x_1, x_2) = \prod_{r=1,2}[1-G_r(x_r)] f_i(x_1, x_2), \quad i=1,2.
\end{cases} \tag{5}
$$

系统的忙期分布为当 $f_0=1, f_1=f_2=0$ 时，上述方程的解 $W_1(t,0,0)$. 当 g_1 和 g_2 为一般分布时，上述方程很难求解. 按(4)式的离散化方法，我们同样可对方程(5)进行离散化，限于篇幅，(5)式的离散化方程略去. 当 $g_1 = g_2 = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ 时，我们由(5)式的离散化方程通过计算机求出了系统忙期分布的密度函数的数值曲线，同时也给出了仿真结果，两者如图2所示，其中光滑的曲线是数值计算结果. 由图可看出两结果基本一致，这说明本文给出的数值方法在实际中是可行的.

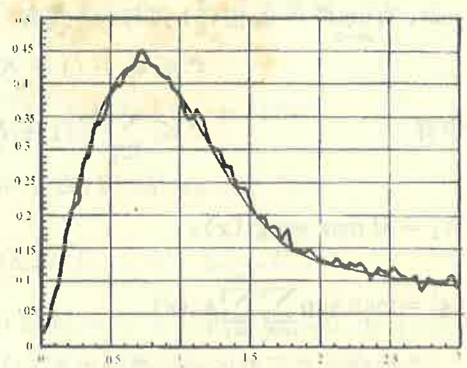

图2　数值结果与仿真结果

参 考 文 献

[1] 姜胜兵，黄志同. 离散事件动态系统的混合状态模型. 控制理论与应用，1993，10(5)：523—528

[2] 姜胜兵，黄志同. 离散事件动态系统的性能分析. 1992年全国控制理论与应用学术年会论文集. 南京，1992，266—271

[3] 姜胜兵. 离散事件动态系统的混合状态法研究. 南京理工大学博士论文. 南京，1993

[4] 陆金甫，关治. 偏微分方程数值解法. 北京：清华大学出版社，1987，25—26

Numerical Analysis of DES Based on Hybrid State Method

JIANG Shengbing　and　HUANG Zhitong

(Department of Automatic Control, Nanjing University of Science and Technology · Nanjing, 210094, PRC)

Abstract: In order to solve a group of integral equations which is the hybrid state model of DES, a numerical method is given in this paper. The stability and convergence of the numerical method are discussed. An example is also given to show how to use the numerical method.

Key words: discrete event dynamic systems; hybrid state; numerical analysis; queueing theory

本文作者简介

姜胜兵　1966年生. 1987年于中国科学技术大学获学士学位, 1990年和1993年于南京理工大学获硕士和博士学位, 目前在南京理工大学任教. 主要研究领域为C^3I系统和离散事件系统.

黄志同　1935年生. 教授, 博士生导师. 1960年毕业于军事工程学院, 之后一直在南京理工大学任教. 研究兴趣为DEDS、大系统, 智能控制与决策. 目前研究领域为自动化信息系统.

《关肇直奖》条例

一、关肇直教授是中国科学院院士, 国内外知名的数学家和控制理论专家. 他一生致力于数学、控制科学和系统科学的研究和发展, 作出了重要的贡献. 为了缅怀和纪念关肇直教授, 推动我国控制科学的发展, 特设立关肇直奖.

二、关肇直奖是中国自动化学会控制理论专业委员会设立的最高青年奖. 基金由国内外单位和个人捐赠, 并由关肇直奖基金委员会管理.

三、关肇直奖的授奖对象为年龄不超过35周岁的青年作者(包括合作者)在中国自动化学会控制理论专业委员会举办的《中国控制会议》上宣读的论文. 关肇直奖每年评定一次, 每次获奖名额不多于两名.

四、凡申请关肇直奖的论文, 需在投稿时注明, 交论文一式九份, 并附工作证、(或学生证)和身份证复印件, 及至少一份同行教授级专家推荐意见. 请奖论文需经会议审稿通过, 然后交评奖委员会委员作书面评审, 定出候选论文. 最后, 在年会期间由评奖委员会根据论文质量及宣读水平, 定出获奖者, 在会议闭幕式上宣布结果并授奖.

五、评奖委员会每年由关肇直奖基金委员会聘请国内知名控制理论及应用专家组成.

六、关肇直奖基金委员会设正主任一人, 副主任若干人. 基金委员会负责基金的筹集和管理, 组织论文的评奖与颁发, 以及决定其他有关事项. 具体工作委托中国自动化学会控制理论专业委员会办理.

七、本条例的解释权和修改权属于关肇直奖基金委员会.

《关肇直奖》基金委员会

主　任: 陈翰馥　　副主任: 毕大川　秦化淑

委　员: 王恩平　郑大钟　郑应平

关肇直奖第三届评奖委员会

主　任: 黄　琳　　副主任: 冯纯伯　何善堉

委　员: 戴冠中　郭　雷　韩京清　李训经　吴　麒　席裕庚　夏国洪　于景元　张嗣瀛