第 13 卷第 2 期
1996 年 4 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 13, No. 2
Apr., 1996

矩阵方程 $A^TP+PA+\sum_{i=1}^{m}F_i^TPF_i=-Q$ 的解及其应用*

邓飞其　冯昭枢　刘永清

（华南理工大学自动化系·广州，510641）

摘要：本文以 Lyapunov 矩阵方程理论为基础研究矩阵方程 $A^TP+PA+\sum_{i=1}^{m}F_i^TPF_i=-Q$ 解的存在性、唯一性、基本解法与数值算法，并用所得结果研究了一类 Itô 型线性随机系统的均方鲁棒稳定性与一类线性时滞系统的稳定性，得到了简洁的代数判据.

关键词：矩阵方程；Kronecker 积；Kronecker 和；随机系统；时滞系统；稳定性

1 引　言

用 Lyapunov 函数或 Lyapunov 泛函研究时不变系统的稳定性，常常遇到各种矩阵代数方程，如 Lyapunov 方程、Stein 方程等等[1~6]. 在研究 Itô 型线性随机系统的均方稳定性时，常遇到形如

$$A^TP+PA+\sum_{i=1}^{m}F_i^TPF_i=-Q \tag{1}$$

的矩阵方程[3,4]. 在研究时滞系统的稳定性时采用形如(1)的方程，亦可得到简洁的新的代数判据. 在(1)中，$A,F,P,Q\in\mathrm{R}^{n\times n}$，$Q$ 为正定或半正定矩阵，P 未知. 在实际问题中，需要确定这种方程是否有正定或半正定解，需要求解方法. 本文以稳定性理论为背景，对(1)的解的存在性、唯一性、基本解法与数值解法作了研究，并用所得结果研究了一类 Itô 型线性随机系统的均方鲁棒稳定性与一类时不变多滞后线性系统的渐近稳定性.

2 基本结果

设 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$，$B=[b_{st}]_{p\times q}$，A,B 的 Kronecker 积 $A\otimes B$ 与 Kronecker 和 $A\oplus B$ 分别定义为

$$A\otimes B=\begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix},$$

$$A\oplus B=I\otimes A+B\otimes I.$$

拉直算子 $\mathrm{vec}:\mathrm{R}^{m\times n}\to\mathrm{R}^{mn}$ 定义为

$$\mathrm{vec}A=[a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n},a_{21},\cdots,a_{2n},\cdots,a_{m1},\cdots,a_{mn}]^T.$$

---

* 国家自然科学基金、霍英东高校青年教师基金、广东省自然科学基金资助项目.

本文于 1994 年 10 月 27 日收到，1995 年 6 月 20 日收到修改稿.

容易验证以下性质[1,2]：

P1) $(A\otimes B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}\otimes B^{\mathrm{T}},(A\oplus B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}\oplus B^{\mathrm{T}}$；

P2) $\mathrm{vec}(ABC)=(A\otimes C^{\mathrm{T}})\mathrm{vec}B$；

P3) $\mathrm{vec}(A^{\mathrm{T}}P+PB)=(A^{\mathrm{T}}\otimes I+I\otimes B^{\mathrm{T}})\mathrm{vec}P$；

P4) 若 A 的特征值是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，$B$ 的特征值是 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_m$，则 $A\otimes B$ 的特征值是 $\lambda_1\mu_1,\cdots,\lambda_1\mu_m,\cdots,\lambda_n\mu_1,\cdots,\lambda_n\mu_m$；

P5) 在 P4) 假设下，$A^{\mathrm{T}}\otimes I+I\otimes B^{\mathrm{T}}$ 的特征值为

$$\sigma_{ij}=\lambda_i+\mu_j,\quad i\in \underline{n}=\{1,2,\cdots,n\},\quad j\in \underline{m}=\{1,2,\cdots,m\}.$$

利用乘积$\otimes$与算子 vec，得到与(1)等价的线性方程组

$$[A\otimes I+I\otimes A+\sum_{i=1}^{m}F_i\otimes F_i]^{\mathrm{T}}\mathrm{vec}P=-\mathrm{vec}Q. \tag{2}$$

(2)给出了(1)的基本解法. 由(2)还有

命题 1　方程(1)有唯一解的充要条件是

$$\det(A\otimes I+I\otimes A+\sum_{i=1}^{m}F_i\otimes F_i)\neq 0. \tag{3}$$

命题 2　在条件(3)下，(1)之解对称.

证　(1)式两端取转置，得方程 $A^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}+P^{\mathrm{T}}A+\sum_{i=1}^{m}F_i^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}F_i=-Q$，于是 P^{T} 亦是(1)之解. 由命题 1，(1) 之解唯一，所以 $P^{\mathrm{T}}=P$.　　证毕.

命题 3　对正定方阵 Q，(1) 有正定解的必要条件是：A 为 Hurwitz 矩阵(稳定).

证　将(1)改写成

$$A^{\mathrm{T}}P+PA=-(Q+\sum_{i=1}^{m}F_i^{\mathrm{T}}PF_i)<0, \tag{1$'$}$$

由(1)$'$与 Lyapunov 矩阵方程理论知 A 稳定.　　证毕.

3　一类充分条件

由命题 3，欲使(1)对任给正定矩阵 Q 有正定解，A 必须稳定，因此，在建立关于(1) 的正定解存在性的任何充分性准则时，均需假设 A 稳定.

下文用 $\|\cdot\|_F$ 表示矩阵 Frobenius 范数，$\|\cdot\|_{2,F}$ 表示 2- 范数或 Frobenius 范数，$\lambda_m(\cdot)$，$\lambda_M(\cdot)$ 分别表示矩阵的最小、最大特征值.

引理 1　若 Lyapunov 方程 $A^{\mathrm{T}}P+PA=-Q$ 有唯一解 P，则

$$\|P\|_F\leqslant\|(A\oplus A)^{-1}\|_{2,F}\|Q\|_F. \tag{4}$$

证　由(2)知方程 $A^{\mathrm{T}}P+PA=-Q$ 可改写成

$$(A\oplus A)^{\mathrm{T}}\mathrm{vec}P=-\mathrm{vec}Q. \tag{5}$$

由条件知，$A\oplus A$ 可逆，所以 $\mathrm{vec}P=-[(A\oplus A)^{-1}]^{\mathrm{T}}\mathrm{vec}Q$. 由于 $\|\mathrm{vec}P\|_2=\|P\|_F$，$\|\mathrm{vec}Q\|_2=\|Q\|_F$，所以将 vec$P$ 取 2- 范数即得(4).　　证毕.

引理 2　若 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 为同阶对称阵，则

$$\lambda_m(\Sigma A_i)\geqslant\Sigma\lambda_m(A_i),\quad \lambda_M(\Sigma A_i)\leqslant\Sigma\lambda_M(A_i). \tag{6}$$

证　只证(6)中第一式. 用 e 表示单位向量. 由 Rayleigh 商知识，$\lambda_m(\Sigma A_i)=\min e^{\mathrm{T}}(\Sigma A_i)e=\min\Sigma e^{\mathrm{T}}A_ie$. 由于 $\Sigma e^{\mathrm{T}}A_ie\geqslant\Sigma\min e^{\mathrm{T}}A_ie=\Sigma\lambda_m(A_i)$，所以 $\min\Sigma e^{\mathrm{T}}A_ie\geqslant\Sigma\lambda_m(A_i)$.　　证毕.

定理 1　若 A 稳定，且

$$\sum_{i=1}^{m}\|F_i\|_F^2<\|(A\oplus A)^{-1}\|_{2,F}^{-1},\tag{7}$$

则对任一正定(半正定)矩阵 Q，(1) 有唯一正定(半正定) 解. 此解由(2) 确定.

证　定义 $\Omega_n=\{P\mid P\in\mathrm{R}^{n\times n},P^{\mathrm{T}}=P,P\geqslant 0\}$. 设 $P_r\in\Omega_n(r=1,2,\cdots)$，在 $\|\cdot\|_F$ 诱导的度量下，$P_1,P_2,\cdots,P_r,\cdots$ 是一个 Cauchy 序列. 从而 $\mathrm{vec}P_1,\mathrm{vec}P_2,\cdots,\mathrm{vec}P_r,\cdots$ 是欧氏空间 R^{n^2} 中的Cauchy 序列，于是它有极限，可记为 $\mathrm{vec}P^*$，于是 $P_r\to P^*$ $(r\to\infty)$. 易证 $P^*\in\Omega_n$，所以 Ω_n 是一个完备度量空间. 由 Lyapunov 矩阵方程理论，当 A 稳定，Q 正定(半正定) 时，$\forall\ P\in\Omega_n$，Lyapunov 矩阵方程

$$A^{\mathrm{T}}T+TA=-\ (Q+\sum_{i=1}^{m}F_i^{\mathrm{T}}PF_i),\tag{8}$$

有唯一正定(半正定) 解 T，记为 $T=T(P)$. 由[1,2]有

$$T(P)=\int_0^{\infty}e^{A^{\mathrm{T}}\sigma}(Q+\sum_{i=1}^{m}F_i^{\mathrm{T}}PF_i)e^{A\sigma}\mathrm{d}\sigma,\tag{9}$$

可见 $T(P)$ 对称，且 $T(P)\geqslant 0$，于是 $T(\Omega_n)\subset\Omega_n$.

由(8)，$\forall\ P_1,P_2\in\Omega_n$，

$$A^{\mathrm{T}}[T(P_2)-T(P_1)]+[T(P_2)-T(P_1)]A=-\sum_{i=1}^{m}F_i^{\mathrm{T}}(P_2-P_1)F_i.\tag{10}$$

记 $\beta=\|(A\oplus A)^{-1}\|_{2,F}\cdot\sum_{i=1}^{m}\|F_i\|_F^2$，则 $\beta<1$. 由引理 1，

$$\begin{aligned}\|T(P_2)-T(P_1)\|_F&\leqslant\|(A\oplus A)^{-1}\|_{2,F}\|\sum_{i=1}^{m}F_i^{\mathrm{T}}(P_2-P_1)F_i\|_F\\&\leqslant\beta\|P_2-P_1\|_F,\end{aligned}\tag{11}$$

于是 $T(\cdot)$ 是 $\Omega_n\to\Omega_n$ 的压缩映像. 由压缩映像原理[7]，T 有唯一不动点 $P\in\Omega_n$. 由 $T(P)$ 的定义与(8)式得

$$A^{\mathrm{T}}P+PA+\sum_{i=1}^{m}F_i^{\mathrm{T}}PF_i=-Q,$$

即 P 满足(1). 又由(9)，$P=P^{(1)}+P^{(2)}$，其中

$$P^{(1)}=\int_0^{\infty}e^{A^{\mathrm{T}}\sigma}Qe^{A\sigma}\mathrm{d}\sigma,\quad P^{(2)}=\int_0^{\infty}e^{A^{\mathrm{T}}\sigma}(\sum_{i=1}^{m}F_i^{\mathrm{T}}PF_i)e^{A\sigma}\mathrm{d}\sigma,\tag{12}$$

$P^{(2)}\geqslant 0$，$P^{(1)}$ 是 $A^{\mathrm{T}}X+XA=-\ Q$ 之解，正定(半正定). 由引理 2 知 P 正定(半正定).

证毕.

注 1　由引理 1 可估计出：在定理 1 条件下，对(1)之解 P 有

$$\|P\|_F\leqslant\|(A\oplus A)^{-1}\|_{2,F}\|Q\|_F/(1-\|(A\oplus A)^{-1}\|_{2,F}\sum_{i=1}^{m}\|F_i\|_F^2).\tag{13}$$

例 1　设在(1)中，$m=n=1,A=[a],F=[f],Q=[q],a<0,q>0$. 由定理 1，当 $f^2<2|a|$ 时，(1) 有唯一正解. 事实上，此时(1) 之解是 $p=q/(2|a|-f^2)$，此解为正的充要条件正好是 $f^2<2|a|$. 这说明定理 1 中的充分条件不是很强.

4 数值解法

任取 P_0(例如 $P_0 = I$)，定义迭代格式

$$A^{\mathrm{T}}P_k + P_kA = -(Q + \sum_{i=1}^{m} F_i^{\mathrm{T}} P_{k-1} F_i),\quad k = 1,2,\cdots \tag{14}$$

在定理 1 的条件下，利用引理 1，仿(11)的推导可得：

$$\| P_{k+1} - P_k \|_F \leqslant \beta \| P_k - P_{k-1} \|_F,\quad k = 1,2,\cdots, \tag{15}$$

由此知 P_k 收敛. 设 $P_k \to P$，则 P 就是(1)之解.

格式(14)是求解一系列 Lyapunov 方程的循环过程[1]. 关于 Lyapunov 方程的求解已有多种方法，参考[1].

例 2 设在方程(1)中，$m = 1, n = 2$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},\quad F = \begin{bmatrix} 0 & 0.3 \\ 0.3 & -0.3 \end{bmatrix},$$

由于 $\mathrm{Re}\lambda(A) = -0.5 < 0$，$\| (A \oplus A)^{-1} \|_F = 1.82003$，$\| F \|_F^2 = 0.27000$，$\| (A \oplus A)^{-1} \|_F \| F \|_F^2 = 0.49141 < 1$，所以定理 1 的条件得到满足，由定理 1，对 $Q = -I$，(1) 有唯一对称正定解. 令 $P_0 = 0$，由(14) 得 $P = [p_{ij}]_{4\times 4}$ 的迭代值：

表 1 矩阵 P 各元素的 3 次迭代值

	p_{11}	p_{12}	p_{21}	p_{22}
$k = 1$	1.50000	0.50000	0.50000	1.00000
$k = 2$	1.43000	0.54500	0.54500	0.56750
$k = 3$	1.44050	0.52554	0.52554	0.54084

5 应用 I：一类线性随机系统的鲁棒稳定性

考虑 Itô 型时不变线性随机系统

$$\mathrm{d}x = Ax\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{m} F_i x \mathrm{d}\beta_i, \tag{16}$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$，$A, F_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$，$F_i$ 为不确定矩阵，$\beta(t) \triangleq [\beta_1(t), \beta_2(t), \cdots, \beta_m(t)]^{\mathrm{T}} (t \geqslant 0)$ 为定义在完全概率空间(Ω, F, P) 上具有独立分量的 m 维标准 Wiener 过程. 下面用到的均方稳定 性的定义见[3]. 对于 F_i 不确定的情形，文献中尚无讨论. 利用本文定理 1，可得到使系统鲁棒稳定的不确定系数上界的简单估计.

定理 2 若 A 稳定，$\sum_{i=1}^{m} \| F_i \|_F^2 \leqslant \gamma = \mathrm{const.}$，且

$$\gamma < \| (A \oplus A)^{-1} \|_{2,F}^{-1}, \tag{17}$$

则(16)之平衡态鲁棒均方渐近稳定.

证 由定理 1，矩阵方程 $A^{\mathrm{T}}P + PA + \sum_{i=1}^{m} F_i^{\mathrm{T}} P F_i = -I$ 有正定解 P. 作 Lyapunov 函数 $V = x^{\mathrm{T}}Px$. 记(16) 生成的伴随 Kolmogorov 算子为 $\mathscr{L}$，则有

$$\mathscr{L}V = x^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}P + PA + \sum_{i=1}^{m} F_i^{\mathrm{T}} P F_i)x = -\| x \|^2,$$

$\mathscr{L}V$ 负定，所以 $x = 0$ 均方渐近稳定. 证毕.

6　应用Ⅰ：一类时滞系统的渐近稳定性

考虑多滞后时不变线性系统

$$\dot{x}(t)=\sum_{i=1}^{m}A_i x(t-\tau_i). \tag{18}$$

其中 $x\in\mathbf{R}^n, A_i\in\mathbf{R}^{n\times n}, 0\leqslant\tau_i\leqslant\tau$. 记 $A=\sum_{i=1}^{m}A_i$.

定理 3　若 A 稳定，且时滞上限 τ 满足

$$0\leqslant\tau<\min\left\{1/\sum_{i=1}^{m}\|A_i\|_F,\ \|(A\oplus A)^{-1}\|_{2,F}^{-1}\Big/(m\|A\|_F^2+\sum_{i=1}^{m}\|A_i\|_F^2)\right\}, \tag{19}$$

则(18)之零解一致渐近稳定.

证　定义算子 D：

$$Dx_t=x(t)+\sum_{i=1}^{m}A_i\int_{t-\tau_i}^{t}x(s)\mathrm{d}s,$$

则(18)可改写成中立型方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Dx_t=Ax(t). \tag{20}$$

由条件(19)有

$$\sum_{i=1}^{m}\tau_i\|A_i\|_F<1,\quad \sum_{i=1}^{m}\tau_i(\|A_i\|_F^2+\|A\|_F^2)<\|(A\oplus A)^{-1}\|_{2,F}^{-1}, \tag{21}$$

所以 D 是强稳定算子[8]，且由定理 1，方程

$$A^{T}P+PA+\sum_{i=1}^{m}\tau_i(A^{T}PA+A_i^{T}PA_i)=-I \tag{22}$$

有正定解 P. 作 Lyapunov 泛函

$$V(x_t)=(Dx_t)^{T}P(Dx_t)+\sum_{i=1}^{m}\int_{t-\tau_i}^{t}\int_{s}^{t}x^{T}(u)A_i^{T}PA_ix(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s, \tag{23}$$

则由(20)，利用不等式 $2x^{T}y\leqslant x^{T}x+y^{T}y\ (x,y\in\mathbf{R}^n)$，可得：

$$\begin{aligned}\dot{V}(x_t)&=2x^{T}(t)A^{T}Px(t)+\sum_{i=1}^{m}\int_{t-\tau_i}^{t}2[\sqrt{P}Ax(t)]^{T}[\sqrt{P}A_ix(s)]\mathrm{d}s\\&\quad+\sum_{i=1}^{m}\tau_ix^{T}(t)A_i^{T}PA_ix(t)-\sum_{i=1}^{m}\int_{t-\tau_i}^{t}x^{T}(s)A_i^{T}PA_ix(s)\mathrm{d}s\\&\leqslant x^{T}(t)[A^{T}P+PA+\sum_{i=1}^{m}\tau_i(A^{T}PA+A_i^{T}PA_i)]x(t)=-\|x(t)\|^2,\end{aligned} \tag{24}$$

所以 $\dot{V}$ 负定. 由[8]中定理 2，(20)从而(18)之零解一致渐近稳定.　　证毕.

注 2　若 $\tau_i=0, i=1,2,\cdots,m$，则(18)成为 $\dot{x}=Ax$，而定理 3 的条件正好是 $\dot{x}=Ax$ 零解渐近稳定的条件.

参考文献

[1] 黄琳. 系统与控制理论中的线性代数. 北京：科学出版社，1984

[2] 陈公宁. 矩阵理论与应用. 北京：高等教育出版社，1990

[3] 刘永清,冯昭枢.大型动力系统的理论与应用,卷4:随机·稳定与控制.广州:华南理工大学出版社,1992
[4] DENG Feiqi, FENG Zhaoshu & LIU Yongqing. Stability and Decentralized Stabilization of Large-Scale Delay Stochastic Systems (Ⅰ) Vector Differential Inequalities and Basic Theorems. Advances in Modelling and Analysis, C, 1994, 43(1): 33—39
[5] DUAN, G. R.. Solution to Matrix Equation $AV+BW=EVF$ and Eigenstructure Assignment for Descriptor Systems. Automatic, 1992, 28(3): 639—643
[6] 钱吉林,廖晓昕.矩阵方程 $A^{T}X+XB=C$ 的新解法及应用.华中师范大学学报,1987,21(2):159—168
[7] 关肇直.泛函分析讲义.北京:高等教育出版社,1959
[8] 徐道义.中立型泛函微分系统的稳定性.数学学报,1992,35(5):632—641

Solution to Matrix Equation $A^{T}P+PA+\sum_{i=1}^{m}F_i^{T}PF_i=-Q$ with Applications

DENG Feiqi, FENG Zhaoshu and LIU Yongqing
(Department of Automation, South China University of Technology · Guangzhou, 510641, PRC)

Abstract: In this paper, the existence, uniqueness, elementary solution and numerical algorithm of solution to matrix equation $A^{T}P+PA+\sum_{i=1}^{m}F_i^{T}PF_i=-Q$ are investigated based on the theory of Lyapunov matrix equations. With the results obtained, the robust mean-square stability of a type of linear Itô stochastic systems and the stability of a type of delay linear systems are studied and some simple algebraic criteria for stability are obtained.

Key words: matrix equation; Kronecker's product; Kronecker's sum; stochastic system; delay system; stability.

本文作者简介

邓飞其 见本刊1996年第1期第35页
冯昭枢 见本刊1996年第1期第35页
刘永清 见本刊1996年第1期第35页