第 13 卷第 2 期　　控制理论与应用　　Vol. 13, No. 2
1996 年 4 月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　Apr., 1996

非线性系统的有界增益分解

骆万文　韩正之　张钟俊

(上海交通大学自动控制系·上海,200030)

摘要:本文对一类典型结构的反馈控制系统,讨论了对象的有界增益稳定的右互质分解和闭环系统有界增益稳定性的关系. 对存在有界增益右互质分解的系统,给出了一种镇定方案,并且研究了这种镇定的鲁棒性.

关键词:非线性系统;算子方法;右互质分解;有界增益稳定

1 引 言

80 年代初,在线性系统鲁棒设计中起着重要作用的互质分解理论被引入到非线性系统的研究中. Hammer 在[1~4]中主要研究了非线性离散时间系统右互质分解存在的条件,Bezout 方程的求解,鲁棒镇定与干扰的参数化及其抑制等问题. 其研究已自成体系. 但是,在很长时间内连续非线性系统的分解理论却收益不大,其中一个很重要的原因是 Bezout 方程在连续系统中很难求解.

1988 年,Verma 利用集合和映射的概念来定义和研究非线性系统的互质分解问题[5]. 他的方法避免了对 Bezout 方程的讨论,使得这种理论有了很大的进步. 以后 Sontag 证明了光滑有界镇定与存在右互质分解之间的关系[6,7]. Desoer[8]和 Verma[9]等给出了可分解系统的状态空间分解形式. Paice 和 Moore 在系统是差分有界的假设下,研究了非线性系统的左互质分解,探讨了系统鲁棒稳定性并且研究了 Youla 公式的推广问题[10].

本文将采用文[5]给出的定义,讨论系统的有界增益稳定和有界增益互质分解问题. 我们感到由于引进了算子范数的概念,一方面能使研究具有更强烈的实际背景,一方面有利于应用泛函和拓扑学中的结论与方法. 本文剩余部分的安排如下:第二节给出全文有关的定义及引理;第三节是主要部分,研究有界增益镇定与有界增益分解问题的关系;第四节是文章的总结.

2 基本定义和引理

我们将一个控制系统 Σ 看成一个输入-输出映射

$$\Sigma:\quad G:U\to V.$$

其中 U 和 V 分别是输入函数空间和输出函数空间. 它们均为线性赋范空间. U_s 和 V_s 分别是 U 和 V 的稳定子空间,一般取成:

$$\begin{aligned} U_s &= \{u; u\in U,\quad \|u\| < \infty\},\\ V_s &= \{v; v\in V,\quad \|v\| < \infty\}. \end{aligned} \tag{1}$$

* 国家自然科学基金和国家教委资助优秀青年基金资助课题.

本文于 1994 年 7 月 30 日收到. 1995 年 7 月 17 日收到修改稿.

其中 V_s 设为 Banach 空间. 记

$$D_0(G) = \{u; u \in U_s,\quad GU \in V_s\} = G^{-1}(V_s) \cap U_s. \tag{2}$$

因为求范数是连续运算，那么 U_s 和 V_s 分别为 U 和 V 中的开集，进而当 G 是连续的时候 $D_0(G)$ 是 U_s 中的开集.

定义 2.1　G 是输入 - 输出稳定的，如果 $D_0(G) = U_s$.

在本文中，我们所说的稳定性都是指输入 - 输出稳定性.

如果 W 是 U 中的一个开集，$G|W$ 表示非线性算子 G 在 W 上的限制. 为了以后的需要，给出如下定义：

定义 2.2　$G|W$ 称为稳定的，如果 $G(U_s \cap W) \subset V_s$.

与式(2)一样，记 $D_0(G|W) = \{u, u \in W \cap U_s, GU \in V_s\} = G^{-1}(V_s) \cap U_s \cap W$，那末 $D_0(G|W)$ 也是开集. 由定义 2.2 可以知道，$G|W$ 稳定的充要条件是 $D_0(G|W) = W \cap U_s$.

定义 2.3　$G|W$ 称为有界增益稳定($f \cdot g$ 稳定)的，如果 $G|W$ 是稳定的，且 $\|G\|_W < \infty$.

这里 $\|G\|_W$ 的定义采用

$$\|G\|_W = \|G(0)\|_V + \sup_{\substack{u \in D_0(G|W) \\ u \neq 0}} \frac{\|GU - G(0)\|_V}{\|u\|_U}. \tag{3}$$

记 $R_+ = [0, +\infty)$，f 是定义在 R_+ 上的有限维向量值函数，记 f_T 为 f 的截断，其定义为：

$$f_T(t) = \begin{cases} f(t), & 0 \leqslant t \leqslant T, \\ 0, & T < t, \end{cases} \quad \forall\, T \in R_+.$$

截断算子 π_T 定义成 $\pi_T: f \to f_T$.

定义 2.4　G 称为是因果的，如果 $\forall\, T \in R_+$，$\pi_T G \pi_T = \pi_T G$.

定义 2.5　一个非线性的反馈系统是适定的，如果以任意点作为输入端，沿着有向路径，系统的每个环节都是因果的，且系统中每个信号都是唯一确定的.

定义 2.6　如果 $N: U \to V$，$D: U \to U$ 都是稳定的因果映射且其中的 D 可逆，并且还满足 $G = ND^{-1}$，则称 G 存在右分解.

如果 N 和 D 都是 $f \cdot g$ 稳定的，那末称 G 存在 $f \cdot g$ 稳定的右分解.

定义 2.7　设 N 和 D 是 G 的右分解，如果 $D_0(G) = DU_s$，则称该分解是右互质的.

定义 2.8　设 N, D 是 G 的 $f \cdot g$ 稳定的右分解，如果 $D_0(G) = DU_s$，且存在 $\alpha > 0$，使得 $\left\|\begin{pmatrix} D \\ N \end{pmatrix} u\right\| \geqslant \alpha \|u\|$，$\forall\, u \in U_s$，则称该分解是 $f \cdot g$ 稳定的右互质分解.

定义 2.7 和定义 2.8 是文[5]的特点，它利用映射的性质来定义互质性，从而避免了求解困难的 Bezout 方程. 考虑熟知的线性系统的稳定右互质分解定义，他们和定义 2.7 和定义 2.8 完全等价.

下面的引理刻划了定义 2.7 的本质，也是本文展开的依据.

引理 2.1[5]　N, D 是 G 的一个右分解，则它是右互质分解的充要条件是不存在 $u \in U - U_s$，使得 $Nu \in V_s$，$Du \in U_s$.

3　$f \cdot g$ 稳定右互质分解和 $f \cdot g$ 镇定

图 1 是最常见的反馈系统，其中 P 是控制对象，C 代表补偿器，它们同时都表示非线性

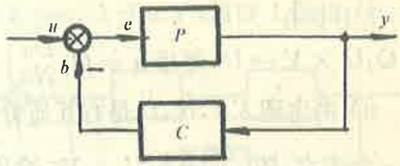

图 1　典型反馈控制系统

算子. u,y,e 和 b 分别是系统的输入、输出、偏差和反馈量,它们分别属于某个线性赋范空间. 依图成立 $u=b+e$.

我们总假定图 1 所示的系统是适定的,因而对每个 u 存在唯一确定的 e 和 y 与之对应,从而下面的映射合理.

$$e=Du,\quad y=Nu. \tag{5}$$

引理 3.1　只要 P 和 C 是输入 - 输出映射,则由(5)式定义的 $D:U\to U$ 必是可逆的.

证　如果存在 u_1 和 u_2 使得 $e_1=Du_1=Du_2=e_2$,则因 P 是一个输入 - 输出映射,从而 $y_1=Pe_1=Pe_2=y_2$,同理,由 C 是输入 - 输出映射可得 $b_1=b_2$,这样 $u_1=b_1+e_1=b_2+e_2=u_2$,这说明 D 是单射. 进一步,对于任意的 e,可以定义 $u=(I+CP)e=e+b$,则因系统是适定的,这个 u 只能产生唯一的 e 使得 $u=(I+CP)e$ 成立. 从而这个 u 是 e 的逆象,这说明 D 是满的,于是 D 是可逆映射.　　证毕.

下面的定理是 $f\cdot g$ 稳定右互质分解存在的一个充分条件.

定理 3.1　在图 1 所示的系统中,如果 C 是 $f\cdot g$ 稳定的,且 $u\to\begin{pmatrix}e\\y\end{pmatrix}$ 是 $f\cdot g$ 稳定的输入 - 输出映射,那末由(5)式定义的 D 和 N 构成 P 的一个 $f\cdot g$ 稳定的右互质分解.

证　证明分为三步.

i) 先证明 N,D 是 P 的一个右分解. 因为 $y=Nu=Pe=PDu$,对于一切 u 成立,从而 $N=PD$. 由引理 3.1,D 是可逆的,因此 $P=ND^{-1}$. 又从已知条件 $u\to\begin{pmatrix}e\\y\end{pmatrix}$ 是稳定的,即 $u\to\begin{pmatrix}D\\N\end{pmatrix}u$ 是稳定的,从而 D 和 N 是稳定的,N,D 确实是 P 的右分解.

ii) 再证明 N 和 D 的互质性. 如果 $e\in U_s,y\in V_s$,即 $Du\in U_s$ 和 $Nu\in V_s$,那么,按已知条件由于 C 是稳定的,从而 $b=Cy\in U_s$,U_s 是线性空间,从而 $u=e+b\in U_s$. 由引理 2.1,N,D 是右互质分解.

iii) 最后证明 $P=ND^{-1}$ 是 $f\cdot g$ 稳定的右互质分解,因为已知 $u\to\begin{pmatrix}e\\y\end{pmatrix}$ 是 $f\cdot g$ 稳定的,即 $0<\|D\|<\infty,0<\|N\|<\infty$,又因为已知 C 是 $f\cdot g$ 稳定的,$\|C\|$ 也是有界的. 按照图 1 成立

$$u=b+e=Cy+e=CNu+Du. \tag{6}$$

则 $$\|u\|\leqslant\|C\|\ \|Nu\|+\|Du\|\leqslant(\|C\|+1)\left\|\begin{pmatrix}D\\N\end{pmatrix}u\right\|.$$

从而由 $0<\|C\|+1<\infty$,可得

$$\left\|\begin{pmatrix}D\\N\end{pmatrix}u\right\|\geqslant(\|C\|+1)^{-1}\|u\|.$$

依定义 2.8,$P=ND^{-1}$ 是 $f\cdot g$ 稳定的右互质分解.　　证毕.

推论 3.1　如果定理 3.1 的的条件满足,那末必定有 $Q:U\times V\to U$ 使得 $Q\begin{pmatrix}D\\N\end{pmatrix}=I_U$,且 Q 在 $I_m\begin{pmatrix}D\\N\end{pmatrix}$ 上是 $f\cdot g$ 稳定的.

证　证明也分成三步.

i) 由图 1 知道，$\forall\, u \in U, u = b + e = Du + C(Nu)$. 右端是 Du 和 Nu 的函数，因而存在 $Q: U \times V \to U$，使得 $u = Q\begin{pmatrix} Du \\ Nu \end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix} D \\ N \end{pmatrix} u$，因而 $Q\begin{pmatrix} D \\ N \end{pmatrix} = I_U$.

ii) 由定理 3.1，N, D 是右互质分解. 根据引理 2.1，$\forall\, u \notin U_s$，$Du \notin U_s$ 和 $Nu \notin V_s$ 至少有一个成立，即 $\begin{pmatrix} D \\ N \end{pmatrix} u \notin U_s \times V_s$. 这说明当 $w \in I_m\begin{pmatrix} D \\ N \end{pmatrix} \cap (U_s \times V_s)$ 时，$u = Qw \in U_s$，这说明 $Q \Big| I_m\begin{pmatrix} D \\ N \end{pmatrix}$ 是稳定的.

iii) 最后证明 Q 在 $I_m\begin{pmatrix} D \\ N \end{pmatrix}$ 上是 $f \cdot g$ 稳定的，采用反证法. 如果 Q 在 $I_m\begin{pmatrix} D \\ N \end{pmatrix}$ 上是无界的，则对任意的 $\beta > 0$，总有 $w = w(\beta)$，$w \in I_m\begin{pmatrix} D \\ N \end{pmatrix} \cap (U_s \times V_s)$，使得 $\| Qw \| > \beta \| w \|$，记 $w = \begin{pmatrix} D \\ N \end{pmatrix} u$，则由引理 2.1，$u \in U_s$. 由(6)式得：

$$\|u\| = \left\| Q\begin{pmatrix} D \\ N \end{pmatrix} u \right\| > \beta \left\| \begin{pmatrix} D \\ N \end{pmatrix} u \right\|. \tag{7}$$

但 N, D 是 $f \cdot g$ 稳定的右互质分解，从而有 $\alpha > 0$ 使得对一切 $u \in U_s$ 成立 $\left\| \begin{pmatrix} D \\ N \end{pmatrix} u \right\| > \alpha \| u \|$，由(7)式得到

$$\| u \| > \beta\alpha \| u \|.$$

由于 β 是任意的，如果当 $\beta > \frac{1}{\alpha}$ 时，上式可推出 $\| u \| > \| u \|$. 这样就产生了矛盾.　　证毕.

Verma 在[5]和[9]中给出的右互质的定义略有不同，文[5]采用的是定义 2.7 的形式，而文[9]采用的是逆的形式. 这里的推论 3.1 证明了两种形式的等价性.

下面的定理给出了互质分解与闭环稳定间的关系. 如果 $P = ND^{-1}$，则图 1 可以画成图 2 的形式，其中 $\xi = D^{-1}e$ 称为系统的拟状态. 我们叙述下面定理.

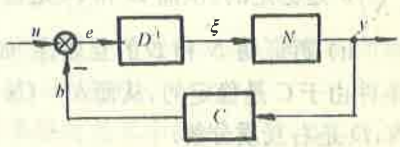

图 2　反馈系统

定理 3.2　考虑图 2 所示系统，如果 N, D 是 P 的 $f \cdot g$ 稳定的右互质分解，C 是 $f \cdot g$ 稳定的输入 - 输出算子，则闭环系统 $f \cdot g$ 稳定的充要条件是存在 $f \cdot g$ 稳定的单模算子 M（M 称为单模算子，如果 M 和 M^{-1} 都是是 $f \cdot g$ 稳定的），使得 $\xi = Mu$.

证　i) 充分性. 如果存在 $f \cdot g$ 稳定的单模算子 M，使得 $\xi = Mu$，那末 $y = NMu, e = DMu$，且 NM, DM 也构成 P 的 $f \cdot g$ 稳定的右互质分解. 从而由 C 的 $f \cdot g$ 稳定性容易证得：当 $u \in U_s$ 时，$b \in U_s, e \in U_s$ 和 $y \in V_s$，而且其增益都是有界的.

ii) 必要性. 据图 2 得到：

$$\xi = D^{-1}e = D^{-1}(u - Cy) = D^{-1}(u - CN\xi),$$

从而

$$u = (D + CN)\xi.$$

又因

$$\| D + CN \| \leqslant \| D \| + \| C \| \cdot \| N \|,$$

从而 D, N 和 C 的 $f \cdot g$ 稳定性保证了 $D + CN$ 是 $f \cdot g$ 稳定的.

同引理 3.1 的证明一样，由系统的适定性可知 $D + CN$ 是可逆的，所以 $\xi = (D + CN)^{-1}u$，而从系统是 $f \cdot g$ 稳定的和 D, N 是 P 的 $f \cdot g$ 稳定的互质分解，说明 $u \to \xi$ 是 $f \cdot$

g 稳定映射，从而 $(D+CN)^{-1}$ 也是 $f\cdot g$ 稳定的，只要令 $M=(D+CN)^{-1}$. 必要性获证.

为了镇定设计的需要，我们考虑图3结构的反馈系统，采用这种结构的原因是因为推论3.1中的 Q 是 $U\times V$ 到 U 的映射. 图3中的 E 是 Q 和其它映射的复合.

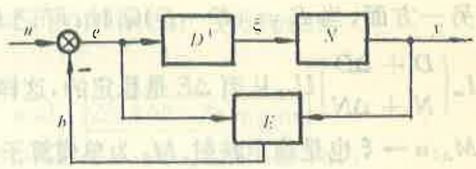

图3　反馈控制系统

推论3.2　考虑图3所示系统，如果 N, D 是对象 P 的 $f\cdot g$ 稳定的右互质分解，E 是 $f\cdot g$ 稳定的，那末当 $\xi=Mu$ 时，其中 M 是 $f\cdot g$ 稳定的单模算子，则闭环系统是 $f\cdot g$ 稳定的.

证　基本与定理3.2的充分性部分的证明相同，这里略去.

应用推论3.2可以构造对象 P 的 $f\cdot g$ 镇定设计.

定理3.3　设 N, D 是 P 的 $f\cdot g$ 稳定的右互质分解，那末当 $E=(I-D)Q$ 时，这里的 Q 是 $\begin{pmatrix}D\\N\end{pmatrix}$ 在 $I_m\begin{pmatrix}D\\N\end{pmatrix}$ 上 $f\cdot g$ 稳定的左逆，闭环系统是 $f\cdot g$ 稳定的.

证　依图3有：

$$\begin{aligned}u&=e+b=e+(I-D)Q\begin{pmatrix}e\\y\end{pmatrix}\\&=D\xi+(I-D)Q\begin{pmatrix}D\\N\end{pmatrix}\xi\\&=D\xi+\xi-D\xi=\xi.\end{aligned}$$

因为 Q 是 $I_m\begin{pmatrix}D\\N\end{pmatrix}$ 上 $f\cdot g$ 稳定的，从而在系统中成立 $(I-D)Q\,\Big|\,I_m\begin{pmatrix}D\\N\end{pmatrix}$ 是 $f\cdot g$ 稳定的，则 $E\,\Big|\,I_m\begin{pmatrix}D\\N\end{pmatrix}$ 是 $f\cdot g$ 稳定的，已知 D, N 是 P 的 $f\cdot g$ 稳定的右互质分解，由推论3.2，定理得证.

将 I 换成 $f\cdot g$ 单模算子 M，定理3.3依然成立，我们将它叙述成下面的推论，其证明因与定理3.3相同而略去.

推论3.3　如果 N, D 是 P 的 $f\cdot g$ 稳定的右互质分解，M 是 $f\cdot g$ 稳定的单模算子，则当 $E=(M-D)Q$ 时，图3所示系统 $f\cdot g$ 闭环稳定. 这里的 Q 是在 $I_m\begin{pmatrix}D\\N\end{pmatrix}$ 上 $f\cdot g$ 稳定的 $\begin{pmatrix}D\\N\end{pmatrix}$ 的左逆.

最后我们利用定理3.3讨论一个鲁棒镇定问题.

如果对象 P 的参数产生摄动，D 成了 $D+\Delta D$，N 成为 $N+\Delta N$，假设 ΔD 和 ΔN 都稳定的，则原系统可用图4表示.

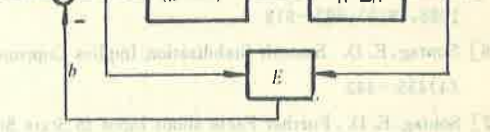

图4　出现摄动的反馈系统

定理3.4　考虑图4所示的系统，假设 $D+\Delta D$ 和 $N+\Delta N$ 互质且系统仍然是适定的，那么闭环系统是鲁棒稳定的充要条件是 $D_0(E)\supset I_m\begin{pmatrix}D+\Delta D\\N+\Delta N\end{pmatrix}U_s$.

证　i) 充分性：如果 $D_0(E)\supset I_m\begin{pmatrix}D+\Delta D\\N+\Delta N\end{pmatrix}U_s$，那末

$$\forall\,\xi\in U_s,\quad b=E\begin{pmatrix}D+\Delta D\\N+\Delta N\end{pmatrix}\xi\in U_s.$$

从而 $u=b+e=b+(D+\Delta D)\xi\in U_s$. 这样如果定义 $M_\Delta:u\to\xi,u=M_\Delta^{-1}\xi$ 是稳定映射，另一方面，当 $E=(I-D)Q$ 时，可记 $E\begin{pmatrix}D+\Delta D\\N+\Delta N\end{pmatrix}\xi=\xi-D\xi+\Delta E\xi$. 由于 $D_0(E)\supset I_m\begin{pmatrix}D+\Delta D\\N+\Delta N\end{pmatrix}U_s$，从而 ΔE 是稳定的，这样 $u=\xi+\Delta E\xi+\Delta D\xi$，$u$ 也属于 U_s. ($\xi\in U_s$)，从而 $M_\Delta:u\to\xi$ 也是稳定映射. M_Δ 为单模算子，由推论 3.2，系统是闭环稳定的.

ii) 必要性. 如果 $D_0(E)\not\supset I_m\begin{pmatrix}D+\Delta D\\N+\Delta N\end{pmatrix}U_s$，即存在 $\xi\in U_s$，但是 $E\begin{pmatrix}D+\Delta D\\N+\Delta N\end{pmatrix}\xi\notin U_s$，按充分性中的证明定义 ΔE，则 $\Delta E\xi\notin U_s$. 从而 $u\notin U_s$，M_Δ 不是单模算子，从而系统是不能稳定的. 证毕.

注 在证明中取 $E=(M-D)Q$，推理也成立.

用完全相同方法可以证明下述推论成立.

推论 3.5 如果在图 4 所示的系统中 $D+\Delta D$ 和 $N+\Delta N$ 是 $f\cdot g$ 稳定的右互质分解，且 $E\begin{pmatrix}D+\Delta D\\N+\Delta N\end{pmatrix}$ 还是 $f\cdot g$ 稳定的. 那么闭环系统是 $f\cdot g$ 鲁棒稳定的.

4 结束语

本文研究了 $f\cdot g$ 稳定右互质分解与 $f\cdot g$ 镇定的关系，文章从一般的反馈结构着手，分别给出了存在右互质分解和镇定的充分条件和必要条件，并且给出其鲁棒稳定的判据. 本文的特点主要表现在更一般的反馈结构和研究了 $f\cdot g$ 稳定性及鲁棒稳定性. 近年来，非线性系统的分解方法正在引起控制理论工作者的兴趣，作者相信这种方法将在镇定设计方面做出新的成果.

参考文献

[1] Hammer, J.. Internally Stable Nonlinear Systems with Disturbances: A Parametrization. IEEE Trans. Automat. Contr., 1994, 39(2): 300—314

[2] Hammer, J.. Robust Stabilization of Nonlinear Systems. Int. J. of Control, 1989, 49(2): 629—635

[3] Hammer, J.. Fraction Representations of Nonlinear Systems and Nonadditive State Feedback. Int. J. of Control, 1989, 50(2): 1981—1990

[4] Hammer, J.. Nonlinear Systems, Stabilization and Coprimeness. Int. J. of Control, 1985, 42(1): 1—20

[5] Verma, M. S.. Coprime Fractional Representations and Stability of Nonlinear Feedback Systems. Int. J. of Control, 1988, 48(3): 897—918

[6] Sontag, E. D.. Smooth Stabilization Implies Coprime Factorization. IEEE Trans. on Automat. Contr., 1989, AC-34(4)435—443

[7] Sontag. E. D.. Further Facts about Input to State Stabilization. IEEE Trans. on Automat. Contr., 1990, AC-35(4): 473—476

[8] Desoer C. A. and Kabuli M. G.. Right Factorizations of a Class of Time-varying Nonlinear Systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1988, AC-33(8): 755—757

[9] Verma M. S. and Hunt, L. R.. Right Coprime Factorizations and Stabilization for Nonlinear Systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1993, AC-38(2): 222—231

[10] Paice A. D. B. and Moore J. B.. On the Youla-Kucera Parametrization for Nonlinear Systems, System and Control Letters, 1990, 14: 121—129

Finite Gain Decomposion of Nonlinear Systems

LUO Wanwen, HAN Zhengzhi and ZHANG Zhongjun

(Department of Automatic Control, Shanghai Jiaotong University · Shanghai, 200030, PRC)

Asbtract: A class of nonlinear systems with popular feedback structure is considered. We discuss the relationships between finite gain stable decomposition and finite gain stability of closed-loop systems. For those systems which can be decomposed, we give feedback law for stabilization and deal with the robust stability of this design.

Key words: nonlinear systems; operator approach; right coprime decompositions; finite gain stability

本文作者简介

骆万文 1967 年生. 1992 年获合肥工业大学电气工程系工学硕士学位，现为上海交通大学自动控制理论与应用专业博士研究生. 主要兴趣是 H_∞ 控制和非线性控制.

韩正之 1947 年生. 1982 年毕业于华东师范大学数学系，1988 年获华东化工学院工业自动化专业博士学位，同年进上海交通大学自动控制理论与应用博士后科研流动站工作. 现为教授、博士生导师. 从事控制系统理论研究. 主要兴趣是非线性系统设计理论.

张钟俊 1915 年生. 教授. 博士生导师. 中国科学院院士. 1934 年毕业于国立交通大学电气工程系，1935 年及 1938 年获美国麻省理工学院电机系硕士和博士学位，曾任中国自动化学会副理事长等职. 1995 年 12 月 29 日晚因病不幸逝世.