第 13 卷第 2 期　　控制理论与应用　　Vol. 13, No. 2
1996 年 4 月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　Apr., 1996

面向 l^1 鲁棒控制的系统辨识*

李昇平　　方华京　黄心汉
（东北大学自动化研究中心・沈阳，110006）　（华中理工大学自动控制工程系・武汉，430074）

摘要：本文研究面向 l^1 控制的辨识方法．提出了有理分式名义模型及最坏情况下辨识误差的 l^1 范数界的两步估计方法．由该方法得到的辨识模型集可直接用于 l^1 控制器设计．

关键词：l^1 控制；中心算法；FIR 模型；有理分式模型

1 引　　言

近年来，面向控制的系统模型集辨识问题受到人们的广泛注意，并产生了许多有意义的结果[1]．文[2]首先提出了面向控制的辨识概念，给出了面向控制的 H_∞ 辨识方法．其基本思想是：基于未知系统在单位圆上的 n 个频率响应点估计，利用 DFT 和 AAK 近似理论构造辨识算法，使得 H_∞ 辨识误差界一致鲁棒收敛．随着 l^1 控制理论的发展和走向应用，文[3]从面向 l^1 控制的角度提出了基于未知 n 个噪声一致有界的脉冲响应上下确界的估计，利用 IBC(Information based complexity) 理论构造辨识算法，使最坏情况下的 l^1 范数辨识误差界随着噪声减小和 n 的增大而趋于零．由于文[3]的方法仅限于单位冲激信号作为试验信号且辨识名义模型为 FIR 模型，因而在应用中受到限制．本文首先把 l^1 辨识方法推广到以任意信号为试验信号，然后提出了能直接用于 l^1 控制器设计的有理分式名义模型辨识问题及其求解方法．因为本文对 l^1 辨识问题的描述与 l^1 控制在最坏情况下满足一定的性能指标相配合，因此本文中讨论的方法称为面向 l^1 控制的辨识方法．

为叙述方便，文中采用如下记号：

$$Z_+ =: \{k \in Z \mid k \geqslant 0\},\ Z_{+,n} =: \{k \in Z \mid 0 \leqslant k \leqslant n-1\},$$

$$l_{1,\rho} =: \{f : Z_+ \to R \mid \|f\|_{1,\rho} =: \sum_{k=0}^{\infty} |f(k)|\rho^k < \infty\},$$

$$l_{\infty,\rho} =: \{f : Z_+ \to R \mid \|f\|_{\infty,\rho} =: \sup_{k \in Z_+} |f(k)|\rho^k < \infty\}.$$

定义赋范线性空间 $l_+ = \bigcup_{\rho > 1} l_{\infty,\rho}$；定义算子 $T_n : l^1 \to R^n$，$(T_n f)(k) = f(k), k \in Z_{+,n}$；且 $(T_n f)_k = 0, k \geqslant 0$．对赋范空间 $Z, \|\cdot\|_Z$，定义集合 $BZ(M) =: \{x \in Z \mid \|x\|_Z \leqslant M\}$．

2 问题描述

假设受辨系统类的脉冲响应传递函数 $\hat{h}$ 构成 l_+，相应的传递函数定义为 $\hat{h}(z) =: \sum_{k=0}^{\infty} h(k) z^k$．为简便起见，以下在不引起混淆的情况下，对 $\hat{h}$ 和 $h = (h(0)), h(1), \cdots)$ 不加区分．

* 国家自然科学基金(69274003)和湖北省自然科学基金(94J064)资助课题．

本文于 1994 年 4 月 13 日收到．1995 年 10 月 5 日收到修改稿．

引理 2.1[3]　$\hat{h} \in l_+$，当且仅当存在 $(\rho, M) \in (1, \infty] \times [0, \infty)$ 使 $\hat{h} \in \bar{B}l_{\infty,\rho}(M)$，即 $|h(k)| \leqslant M\rho^{-k}, k \in Z_{-,n}$.

假设观测噪声 $v \in \bar{B}l_\infty(\varepsilon)$. 对先验给定信息量 $n \in Z_+$，后验信息由如下试验算子定义：

$$E_n:\quad l_+ \times l_\infty \to T_n l_\infty.$$

这里，$E_n(\hat{h}, v) =: T_n[(h * u) + v]$. 则观测数据 $y \in T_n l_\infty, y(k) =: (E_n(h, v))_k, k \in Z_{+,n}$，进一步写成：

$$y = UT_n h + T_n v, \quad \hat{h} \in \bar{B}l_{\infty,\rho}(M), \quad v \in \bar{B}l_n(\varepsilon).$$

其中

$$U = \begin{bmatrix} u(0) & 0 & \cdots & 0 \\ u(1) & u(0) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ u(n-1) & u(n-2) & \cdots & u(0) \end{bmatrix}. \tag{2.1}$$

记 $Y =: \{y \in R^n \mid y = UT_n h + T_n V, \hat{h} \in \bar{B}l_{\infty,\rho}, (M), v \in \bar{B}l_\infty(\varepsilon)$，$Y$ 构成受辨识系统的后验信息. 注意到试验算子 $E_n(\cdot, \cdot)$ 是多对一映射，因而观测数据 y 对应的系统模型是非唯一的，全体满足先验和后验信息的模型构成集合 $P(y) =: \{\hat{h} \in \bar{B}l_{\infty,\rho}(M) \mid y = UT_n h + T_n v, v \in \bar{B}l_\infty(\varepsilon)\}$，$P(y)$ 的截断集 $P_n(y) =: \{T_n h / h \in P(y)\}$. $P(y)$，$P_n(y)$，给出了受辨系统的不确定性描述，称之为系统模型集. 容易验证，$P_n(y) \in R^n$ 是连通闭凸多胞形.

本文的目的是，首先求解算法 $A_n: R^n \to l_+$ 使得对任意非零输入 u 和 $n \in Z_+$，使 FIR 模型 $A_n(E_n(\hat{h}, v)) \in l_+$，并且最坏情况下辨识误差：

$$e(A_n; \rho, M, \varepsilon) =: \sup_{\hat{h} \in \bar{B}l_{\infty,\rho}(M) v \in \bar{B}l_\infty(\varepsilon)} \| \hat{h}(z) - A_n(E_n(\hat{h}, v)) \|_1$$

最小，且满足收敛条件：

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \rho \to \infty \\ M \to 0}} e(A_n; \rho, M, \varepsilon) = 0,$$

和

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ n \to \infty}} e(A_n; \rho, M, \varepsilon) = 0.$$

继而导出 $e(A_n; \rho, M, \varepsilon)$ 的上确界. 然后，将 FIR 模型最佳地拟合成有理分式模型，并给出模型误差的 l^1 范数界.

定义 2.1　算法 A_n^* 称为最优的，若 $e^*(A_n^*; \rho, M, \varepsilon) = \inf_{\{A_n \mid A_n(y) \in l_+\}} e(A_n; \rho, M, \varepsilon)$.

3　最坏情况下最优 FIR 模型及其 l^1 误差界

3.1　$P_n(y)$ 的最小外框

由 $P_n(y)$ 的定义，$P_n(y)$ 中任意元素可作为名义模型的点估计. 但由于 $P_n(y)$ 结构的复杂性以致于名义模型的点估计问题变得十分困难. 本文采用 Milanese 和 Belforte 在文献[4]中提出的轴 - 共线框(axis-aligned boxes)近以描述 $P_n(y)$. 我们把 $P_n(y)$ 的外包轴 - 共线框称为最小外框(简记 MOB).

定义 3.1　系统模型的点估计 h 第 i 个分量的不确定区间 UI_i 定义为：

$$UI_i = [h_L(i), h_U(i)].$$

其中

$$h_L(i) = \min_{h \in P_n(y)} h(i), \quad h_U(i) = \max_{h \in P_n(y)} h(i).$$

那么 $P_n(y)$ 的最小外框为各 UI_i 的迪卡尔积：

$$\mathrm{MOB} = [UI_0 \times UI_1 \times \cdots \times UI_{n-1}].$$

引理 3.1 设 $u(0) \neq 0$,则式(2.1)的逆 U^{-1} 亦为下三角 Toeplitz 矩阵，记为

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} c_0 & & & 0 \\ c_1 & c_0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ c_{n-1} & c_{n-2} & \cdots & c_0 \end{bmatrix}.$$

证明从略.

定理 3.1 设 $u(0) \neq 0$,记 $UI_k = [h_L(k), h_U(R)]$，则

$$h_L(k) = \max\{\sum_{j=0}^{k}(c_{k-j}y(j) - |c_{k-j}|\varepsilon), -M\rho^{-k}\}, \tag{3.1}$$

$$h_U(k) = \min\{\sum_{j=0}^{k}(c_{k-j}y(j) + |c_{k-j}|\varepsilon), M\rho^{-k}\}. \tag{3.2}$$

证　由 $y = UT_nh + T_nv$,

$\because$ $u(0) \neq 0$ 再由引理 3.1 得 $T_nh = U^{-1}(y + T_nv)$，因而 $h(k) = \sum_{j=0}^{k} c_{k-j}h(j) - \sum_{j=0}^{k} c_{k-j}v_j$，又 $v \in Bl_\infty(\varepsilon)$，所以

$$\max h(k) = \sum_{j=0}^{k}(c_{k-j}h(j) + |c_{k-j}|\varepsilon), \tag{3.3}$$

$$\min h(k) = \sum_{j=0}^{k}(c_{k-j}h(j) - |c_{k-j}|\varepsilon). \tag{3.4}$$

又 $h \in Bl_{\infty,\rho}(M)$，故定理得证.

3.2 FIR 模型的中心辨识及其 l^1 误差界

定理 3.2 构造算法 A_n^c 使得

$$[A_n^c(y)]_k = \begin{cases} \frac{1}{2}[h_L(k) + h_U(k)], & k \in Z_{+,n}, \\ 0, & k \geqslant n. \end{cases} \tag{3.5}$$

那么，A_n^c 为最优算法，且 A_n^c 必属于 $P(y)$.

证　由文献[5]，$P(y)$ 的中心可由其 MOB 逐个分量计算. 因此 $A_n^c(y)$ 为 $P(y)$ 的中心，A_n^c 为中心算法. 由文[5]和定义 2.1，A_n^c 为最优辨识算法. 因 $P_n(y)$ 的闭性和凸性，故 $A_n^c(y) \in P(y)$.　证毕.

定理 3.3 设真实系统 $h \in l_+$，观测噪声 $v \in Bl_\infty(\varepsilon)$，则

$$e(A_n^c;\rho,M,\varepsilon) \leqslant \frac{M}{\rho^{n-1}(\rho-1)} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}[h_U(k) - h_L(k)],$$

并且对任意观测数据 $y \in Y$，A_n^c 收敛.

证　$$e(A_n^c;\rho,M,\varepsilon) = \sup_{h \in Bl_{\infty,\rho}(M) v \in Bl_\infty(\varepsilon)} \| h - A_n^c(y) \|_1$$

$$\leqslant \frac{M}{\rho^{n-1}(\rho-1)} + \sup_{h\in \text{MOB}} \sum_{k=0}^{n-1} |h(k) - [A_n^c(y)]_k|$$

$$= \frac{M}{\rho^{n-1}(\rho-1)} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(h_U(k) - h_L(k)).$$

由(3.3),(3.4)式,当 $\varepsilon\to 0$ 时,$\max h(k) - \min h(k), k\in Z_{+,n}$ 均为 ε 的同阶无穷小,记为 $\max h(k) - \min h(k) = O_k(\varepsilon)$. 因 $(\rho,M)\in(1,\infty]\times[0,\infty)$,所以 $\forall\,\varepsilon>0,\exists\,N$,当 $k\geqslant N$ 时,$2M\rho^{-k}\leqslant O_k(\varepsilon)$. 因此 $e(A_n^c;\rho,M,\varepsilon)\leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\min\{O_k(\varepsilon),2M\rho^{-k}\}+O(\varepsilon)$. $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ \varepsilon\to 0}} e(A_n^c;\rho,M,\varepsilon)=0$. $\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \rho\to\infty\\ M\to 0}} e(A_n^c;\rho,M,\varepsilon)=0$ 显然成立.　　证毕.

4 最佳有理分式模型拟合

设系统有理分式名义模型的分母多项式先验给定. 理由是:第一,受辨系统构成 l_+ 空间,因此系统模型集内所有名义模型的极点均位于单位圆外,从而限制了分母多项式的选择范围;第二,由 l^1 鲁棒控制器设计方法[6] 知,名义模型极点的分布在不影响单位圆外极零点数目的情况下,在控制器设计中处于同等重要的地位. 在稳定性不变条件下,系统动力学的变化可由分子多项式确定. 在实际应用中若不便做出假设,也可用文[4]的参数估计方法估计分母多项式. 因此,设系统有理分式模型簇形如:

$$P(z) = \frac{x(z)}{d(z)},\quad x(z) = \sum_{k=0}^{m} x(k)z^k. \tag{4.1}$$

式中,$d(z)$ 为先验假定的 m 阶多项式,则模型最佳拟合问题可归为如下 l^1 优化问题:

$$\min_{\delta P(z),x(z)} \|\delta P\|_1 =: \mu, \tag{4.2}$$

$$\text{s.t.}\ \delta P(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\delta(k)z^k = \hat{A}_n^c(y) - \frac{x(z)}{d(z)}.$$

式中
$$\hat{A}_n^c(y) = \sum_{k=0}^{n-1}[A_n^c(y)]_k z^k.$$

因优化问题(4.2)有无穷多个变量,不易求解. 我们考虑如下截断优化问题. 引入非负整数 t,截断问题可形式化为

$$\min_{\delta P(z),x(z)} \|\delta P\|_t =: \mu_t, \tag{4.3}$$

$$\text{s.t.}\ \delta P(z) = \sum_{k=0}^{t-1}\delta(k)z^k = \hat{A}_n^c(y) - \frac{x(z)}{d(z)}.$$

式中
$$\hat{A}_n^c(y) = \sum_{k=0}^{n-1}[A_n^c(y)]_k z^k.$$

优化问题(4.3)等价于如下线性规划问题[6]:

$$\min_{x,\delta_1,\delta_2}\sum_{k=0}^{t-1}(\delta_1(k)+\delta_2(k)) \tag{4.4}$$

$$\text{s.t.}\ \sum_{j=0}^{k-1} d(k-j)(\delta_1(j)-\delta_2(j)) + x(k) - \sum_{j=0}^{k-1} d(k-j)[A_n^c(y)]_j = 0,$$

$$\delta_1(k)\geqslant 0,\quad \delta_2(k)\geqslant 0,\quad k=1,\cdots,t.$$

定义单调上升非零整数序列 $\{t(i)\}_{i=0}^{\infty}$，显然 $\lim\limits_{i\to\infty}\mu_{t(i)}=\mu$. 只要 i 足够大，$|\mu-\mu_{t(i)}|$ 可任意小.

定理 4.1 设有理分式模型(4.1)的模型误差为 ΔP，则最坏情况下的 l^1 误差界：

$$\|\Delta P\|_1 \leqslant M/\rho^{n-1}(\rho-1)+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(h_U(k)-h_L(k))+\|\delta P(z)\|_1.$$

式中，$h_U(k)$ 和 $h_L(k)$ 由式(3.1)和(3.2)给出.

证 由三角不等式及定理 4.3，易证该定理成立. 从略.

注 $\|\delta P(z)\|_1$ 的值可由求解线性规划问题(4.4)当 t 取足够大的整数(至少 $t\geqslant \max(m,n)$)近似得到，即 $\|\delta P(z)\|_1 \approx \sum\limits_{k=0}^{t}(\delta_1(k)+\delta_2(k))$.

5 仿真实例

考虑如下离散时间系统

$$G(z)=\frac{10z}{0.125z^2-0.75z+1},$$

其前 10 个时刻的有限维脉冲响应 (FIR) 在图 1 中以 h_0 表示. 取试验输入信号 $u(k)=5, k=0,1,\cdots,9$. 观测噪声 $|v(k)|\leqslant 0.5$ 的任意有界信号. 根据第三节定理 3.1 和定理 3.2 辨识得前 10 时刻的 FIR，图 1 中以 h_f 表示. 再由第 4 节有理分式拟合方法得辨识名义模型 $\hat{G}(z)=\dfrac{0.4933z^2+10.01z+0.0444}{0.1201z^2-0.722z+1}$(分母由文[4]方法给出). 其 FIR 在图 1 中以 h_i 表示. 根据第 3,4 节，可得辨识名义模型的 l^1 误差界为 $\|\Delta\hat{G}\|_1\leqslant 1.410212$. 仿真过程中采样周期取 1s.

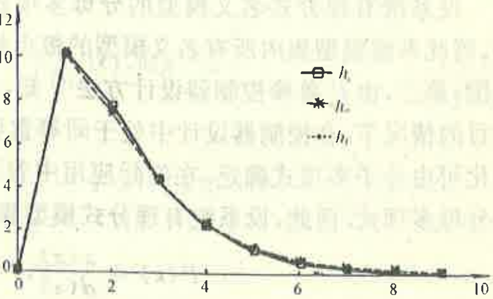

图 1 FIR 图线(采样周期为 1s)

6 结束语

本文提出了有理分式名义模型及其 l^1 误差界的估计方法. 该方法不仅有效地实现了模型简化而且辨识模型集可直接用于 l^1 控制器设计.

参 考 文 献

[1] 冯旭，孙优贤. 鲁棒辨识评述. 控制理论与应用，1993，10(6)：609—616

[2] Helmicki，A. J.，Jacoboson C. A. and Nett，C. N.. Control-Oriented System Identification：A Worst-Case/Deterministic Approach in H∞. IEEE Trans. Automat. Contr.，1991，AC-36：1163—1176

[3] Jacobson，C. A.，Nett，C. N. and Partington，J. R.. Worst-case System Identification in l^1：Optimal Algrithms and Error Bounds. System Contr. Letter，1992，19：419—424

[4] Milanese，M. and Vicino，I.. Estimation Theory for Nonlinear Models and Set Membership Uncertainty. Automatica，1991，27：403—408

[5] Milanese，M. and Tempo，R.. Optimal Algorithms Theory for Estimation and Prediction. IEEE Trans. Automat. Control，1985，AC-30：730—738

[6] 方华京. 控制系统 l^1 优化理论及应用. 华中理工大学博士论文，武汉，1991

l^1 Robust Control Oriented System Identification

LI Shengping, FANG Huajing and HUANG Xinhan

(Department of Automatic Control, Huazhong University of Science and Technology • Wuhan, 430074, PRC)

Abstract: In this paper, we concentrate on an efficient method of l^1 robust control oriented system identification. An estimation algorithm for rational model and correspond worst-case l^1 norm bound is proposed. The model obtained by this method can be dirrectly used for l^1 robust controller designed.

Key words: l^1 robust control; central algorithm FIR model; rational model

本文作者简介

李升平　1966 年生. 1987, 1992 年分别在武汉水运工程学院、北京理工大学获工学学士和工学硕士学位；现为华中理工大学博士研究生. 研究方向为鲁棒辨识、鲁棒控制及计算机控制.

方华京　1955 年生. 分别于 1982, 1984 和 1991 年在华中理工大学获学士、硕士和博士学位，现为华中理工大学教授. 主要研究方向为鲁棒控制理论及应用，采样-数据系统优化设计理论等.

黄心汉　1946 年生. 1969 年毕业于华中工学院电机系. 现为华中理工大学教授，博士生导师. 长期从事自动控制理论及应用的教学和科研工作. 主要研究方向为机器人智能控制与传感技术.

(上接第 241 页)

早在 1994 年 3 月，中国科学技术大学校长、候补中央委员汤洪高教授乘车现场观看了 GPS 实验室的样品演示后，当即指示：走出科大大院，走向高新技术开发和大产业、大公司结合，合资合股，走向市场. 中国科学技术大学 GPS 实验室愿意与国内外一切有实力、有远见的公司合作、采用包括单项成果转让，开发承包，技术投入等各种方式，使自己的 GPS 研制成果尽快为社会接受，为社会服务.

Fax: 551-3601531　电话: 531-3601521　E-mail: baoyl @ sparc. auto. ustc. ac. cn