

辨识 Wiener 模型的一种新方法

黄正良 吴 坚

万百五

(西南工学院·四川绵阳, 621002) (西安交通大学系统工程研究所·西安, 710049)

摘要: 本文提出了一种辨识 Wiener 模型的新方法. 该方法利用不同幅值的周期脉冲信号作输入辨识信号, 并且获得了非线性增益未知参数和线性子系统脉冲响应的强一致性估计. 本文还研究了估计残差的渐近分布以及收敛速度. 最后的数字仿真研究说明了该方法的有效性和实用性.

关键词: Wiener 模型; 脉冲响应; 辨识

1 引言

在实际中, 有一类较为广泛使用的系统是由 Wiener 模型描述的非线性系统^[1]. 考虑由图 1 所示的离散时间 Wiener 模型. 这里 $u(k) \in [a, b]$, $y(k)$ 分别是系统的输入, 输出; $z(k)$ 是线性子系统的输出, 且是不可测量的; $v(k)$ 为系统的噪声; $g(\tau)$ 为线性子系统的脉冲响应; $\Phi[\cdot]$ 为非线性增益.

关于这类系统的辨识由来已久^[2,3], 最近文[4]采用不同幅值的三电平伪随机 m 序列作为辨识输入信号, 详细地讨论了 Wiener 模型的辨识. 本文另辟蹊径, 利用不同幅值的周期脉冲信号作为辨识输入信号, 获得了非线性增益未知系数和脉冲响应的强一致性估计. 并分析了估计残差的渐近分布, 给出了估计残差的收敛速度.

2 辨识算法

为了分析的方便, 对系统作如下假设

假设 1 $\Phi[z] = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n, a_1 = 1, n$ 已知;

假设 2 $v(k) = \sum_{s=0}^{\infty} h(s)e(k-s), \sum_{s=0}^{\infty} |h(s)| < \infty$, 这里 $e(k)$ 是均值为零, 方差为 σ^2 的相互独立的随机变量序列, 且存在 $\alpha > 0$ 使 $E|e(k)|^{2-\alpha}$ 一致有界.

假设 3 线性子系统是有限脉冲响应系统^[5], 即存在 P , 使 $z(k) = \sum_{s=0}^P g(s)u(k-s), \lambda = \sum_{s=0}^P g(s) \neq 0, P$ 已知.

在上述假设下, 图 1 所示系统可用下式来描述.

$$y(k) = \Phi\left[\sum_{s=0}^P g(s)u(k-s)\right] + v(k). \quad (1)$$

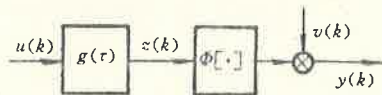


图 1 Wiener 模型

由初等数论知识可知: 对任意的非负整数 k , 可表成形式 $k = (P+1)[(n+1)q+i] + j$, 其中 $0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq P, q \geq 0$. 当 $k < 0$ 时, $u(k)$ 可为 $[a, b]$ 区间内变化的任意信号,

当 $k \geq 0$ 时, $u(k)$ 为如下的具有不同幅值的周期脉冲信号.

$$u(k) = \begin{cases} \sigma_i, & j = 0, \\ 0, & j \neq 0. \end{cases} \quad (2)$$

这里 $\sigma_i \neq 0 (i = 0, 1, \dots, n)$ 为 $[a, b]$ 区间内的 $(n+1)$ 个互不相同的点. 为方便起见, 记 $k = k(q, j, i)$. 当 $q \geq 1$ 时

$$y[k(q, j, i)] = \Phi[g(j)\sigma_i] + v[k(q, j, i)]. \quad (3)$$

由假设 2 知 $Ev(k) = 0$, 又对任意 $q \geq 1$ 和 $t+q \geq 1$ 有

$$\begin{aligned} & Ev[k(q, j, i)]v[k(q+t, j, i)] \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} h(s)h(l)Ee[k(q, j, i) - s]e[k(q+t, j, i) - l] \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} h(s)h[s + k(|t|, 0, 0)]\varphi^2 \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} h(s)h[s + (p+1)(n+1)|t|]\varphi^2. \end{aligned} \quad (4)$$

引理 1 若假设 2 成立, 则有下列式成立,

$$E\left[\sum_{q=1}^N v[k(q, j, i)]\right]^2 / N \leq 2\left(\sum_{s=0}^{\infty} |h(s)|\varphi\right)^2. \quad (5)$$

证 由假设 2 可知

$$\begin{aligned} & E\left[\sum_{q=1}^N v[k(q, j, i)]\right]^2 \\ &= \sum_{q=1}^N \sum_{r=1}^N Ev[k(q, j, i)]v[k(r, j, i)] \\ &= \sum_{q=1}^N \sum_{r=1}^N \sum_{s=0}^{\infty} h(s)h[s + (p+1)(n+1)|r-q|]\varphi^2 \quad (\text{利用(4)式}) \\ &\leq 2N \sum_{\beta=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} h(s)h[s + (p+1)(n+1)\beta]\varphi^2 \quad (\text{令 } \beta = |r-q|) \\ &\leq 2N \left[\sum_{s=0}^{\infty} |h(s)|\varphi\right]^2, \end{aligned} \quad (6)$$

由此可知(5)式成立.

由(5)式可得到

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{q=1}^N v[k(q, j, i)] = 0, \quad (\text{均方}) \quad (7)$$

于是有(从(3)式和(7)式)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{q=1}^N y[k(q, j, i)] = \Phi[g(j)\sigma_i]. \quad (\text{均方}) \quad (8)$$

$$\text{记} \quad \Phi_N[g(j)\sigma_i] = \frac{1}{N} \sum_{q=1}^N y[k(q, j, i)], \quad (9)$$

$$\text{则有} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \Phi_N[g(j)\sigma_i] = \Phi[g(j)\sigma_i]. \quad (\text{均方}) \quad (10)$$

定理 1 若假设 1~3 成立, 输入信号采用由(2)式所示的周期脉冲信号, 则由(9)式给

出的 $\Phi_N[g(j)\sigma_i]$ 是 $\Phi[g(j)\sigma_i]$ 的强一致性估计.

由(9)式和(10)式便知定理 1 成立.

由假设 1 又有

$$\Phi_N[g(j)\sigma_i] = a_0 + a_1 g(j)\sigma_i + \cdots + a_n g^n(j)\sigma_i + \frac{1}{N} \sum_{q=1}^N v[k(q, j, i)]. \quad (11)$$

对于 $i = 0, 1, 2, \dots, n$ 便可得到下列 n 阶线性方程组.

$$\begin{bmatrix} \Phi_N[g(j)\sigma_0] \\ \Phi_N[g(j)\sigma_1] \\ \vdots \\ \Phi_N[g(j)\sigma_n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sigma_0'' & \cdots & \sigma_0^n \\ 1 & \sigma_1 & \cdots & \sigma_1^n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \sigma_n & \cdots & \sigma_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 g(j) \\ \vdots \\ a_n g^n(j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{N} \sum_{q=1}^N v[k(q, j, 0)] \\ \frac{1}{N} \sum_{q=1}^N v[k(q, j, 1)] \\ \vdots \\ \frac{1}{N} \sum_{q=1}^N v[k(q, j, n)] \end{bmatrix}. \quad (12)$$

从而有

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 g(j) \\ \vdots \\ a_n g^n(j) \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} \Phi_N[g(j)\sigma_0] \\ \Phi_N[g(j)\sigma_1] \\ \vdots \\ \Phi_N[g(j)\sigma_n] \end{bmatrix} - A^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{N} \sum_{q=1}^N v[k(q, j, 0)] \\ \frac{1}{N} \sum_{q=1}^N v[k(q, j, 1)] \\ \vdots \\ \frac{1}{N} \sum_{q=1}^N v[k(q, j, n)] \end{bmatrix}. \quad (13)$$

这里

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \sigma_0 & \cdots & \sigma_0^n \\ 1 & \sigma_1 & \cdots & \sigma_1^n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \sigma_n & \cdots & \sigma_n^n \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n+1,1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n+1,2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{1,n+1} & A_{2,n+2} & \cdots & A_{n+1,n+1} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

于是有 ($i=0, 1, \dots, n$)

$$a_i g^i(j) = \frac{1}{|A|} \sum_{s=1}^{n+1} A_{s,i+1} \Phi_N[g(j)\sigma_{s-1}] - \frac{1}{|A|} \sum_{s=1}^{n+1} A_{s,i+1} \frac{1}{N} \sum_{q=1}^N v[k(q, j, s-1)]. \quad (15)$$

进一步记

$$\overline{a_i g^i(j)}(N) = \frac{1}{|A|} \sum_{s=1}^{n+1} A_{s,i+1} \Phi_N[g(j)\sigma_{s-1}], \quad (16)$$

显然有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \overline{a_i g^i(j)}(N) = a_i g^i(j). \quad (\text{均方}) \quad (17)$$

特别对于 $i = 1$, 因 $a_1 = 1$, 则有

$$g(j) = \frac{1}{|A|} \sum_{s=1}^{n+1} A_{s,2} \Phi_N[g(j)\sigma_{s-1}] - \frac{1}{|A|} \sum_{s=1}^{n+1} A_{s,2} \frac{1}{N} \sum_{q=1}^N v[k(q, j, s-1)]. \quad (18)$$

$$\overline{g(j)}(N) = \frac{1}{|A|} \sum_{s=1}^{n+1} A_{s,2} \Phi_N[g(j)\sigma_{s-1}], \quad (19)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \overline{g(j)}(N) = g(j), \quad (\text{均方}) \quad (20)$$

即可获得 $g(j)$ 的强一致性分析. 又因为 $\lambda = \sum_{j=0}^p g(j) \neq 0$, 故可选择 j_0 使 $g(j_0) \neq 0$ (不妨设 $j_0 = 1$), 于是对于充分大的 N 定义

$$\bar{a}_i(N) = \overline{a_i g^i(1)}(N) / [\overline{g(1)}(N)]^i, \quad (21)$$

显然有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \bar{a}_i(N) = a_i, \quad (\text{均方}) \quad (22)$$

定理 2 若假设 1 ~ 3 成立, 则由 (19) 式和 (21) 式给出的 $\bar{g}(j)(N)$ 和 $\bar{a}_i(N)$ 分别是 $g(j)$ 和 a_i 的强一致性估计.

由 (18) ~ (22) 式便知定理 2 成立.

3 估计残差分析

下面将分析估计残差的渐近分布和收敛速度. 记 $\delta_1(N) = \bar{g}(j)(N) - g(j)$, 则有 (依 18 式) 和 (19) 式)

$$\begin{aligned} \sqrt{N} \delta_1(N) &= \frac{1}{|A|} \sum_{s=1}^{n+1} A_{s,2} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{q=1}^N v[k(q, j, s-1)] \\ &= \frac{1}{|A|} \sum_{s=1}^{n+1} A_{s,2} \sum_{t=0}^{\infty} h(t) \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{q=1}^N v[k(q, j, s-1)]. \end{aligned} \quad (23)$$

由中心极限定理^[6]可知

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{N} \delta_1(N) = \frac{1}{|A|} \sum_{s=1}^{n+1} A_{s,2} \sum_{t=0}^{\infty} h(t) W(j, s-1, t). \quad (\text{分布}) \quad (24)$$

这里 $W(j, s-1, t) \sim N(0, \varphi^2)$. 由于正态随机变量的任一线性组合还是正态随机变量, 且正态随机序列的均方极限还是正态随机变量, 从而知

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{N} \delta_1(N) \sim N(0, \varphi^2). \quad (25)$$

这里 $\varphi^2 = E \left[\frac{1}{|A|} \sum_{s=1}^{n+1} \sum_{t=0}^{\infty} A_{s,2} h(t) W(j, s-1, t) \right]^2$. 进一步有

$$\begin{aligned} & (E[\sqrt{N} \delta_1(N)]^2)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \left| \frac{1}{|A|} \right| \sum_{s=1}^{n+1} |A_{s,2}| \left[E \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{q=1}^N v[k(q, j, s-1)] \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \left| \frac{1}{|A|} \right| \sum_{s=1}^{n+1} |A_{s,2}| \sqrt{2} \sum_{t=0}^{\infty} |h(t)| \varphi \quad (\text{利用了引理 1}) \\ & = \sqrt{2} \varphi \left| \frac{1}{|A|} \right| \sum_{t=0}^{\infty} |h(t)| \sum_{s=1}^{n+1} |A_{s,2}| \end{aligned} \quad (26)$$

从而知 $\|\delta_1(N)\| = o\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$. (27)

这里 $\|\cdot\|$ 表示均方范数. 再记 $\delta_2(N) = \bar{a}_i(N) - a_i$, 则有

$$\|\delta_2(N)\| = \left\| \overline{a_i g^i(1)}(N) / [\overline{g(1)}(N)]^i - a_i \right\|$$

$$\begin{aligned}
& \leq [\| \overline{a_i g^i(1)(N)} - a_i g^i(1) \| + \| a_i g^i(1) - a_i [\overline{g(1)(N)}]^i \|] / \| \overline{g(1)(N)}^i \| \\
& = [\| \frac{1}{|A|} \sum_{s=1}^{n+1} A_{s,i+1} \frac{1}{N} \sum_{q=1}^N v[k(q,j,s-1)] \| \\
& \quad + |a_i| \| \frac{1}{|A|} \sum_{s=1}^{n+1} |A_{s,2}| \frac{1}{N} \sum_{q=1}^N v[k(q,j,s-1)] \|] / \| \overline{g(1)(N)} \|' \\
& \leq \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{2} \left| \frac{1}{|A|} \right| \varphi \sum_{i=0}^{\infty} |h(t)| \left[\sum_{s=1}^{n+1} (|A_{s,i+1}| + |A_{s,2}| |a_i|) \right] / \| \overline{g(1)(N)} \|'. \quad (28)
\end{aligned}$$

由于 $\lim_{N \rightarrow \infty} \| \overline{g(1)(N)} \| = g(1) \neq 0$, 所以对于充分大的 N , 一定有 $\| \overline{g(1)(N)} \| > 0$. 于是由(28)式知

$$\| \delta_2(N) \| = O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right). \quad (29)$$

定理 3 若假设 1~3 成立, 则估计残差 $\delta_1(N)$ 的渐近分布为正态分布, 且 $\delta_1(N)$, $\delta_2(N)$ 的收敛速度与 $\frac{1}{\sqrt{N}}$ 同阶.

由(25)式, (27)式和(29)式, 便知定理 3 成立.

整个辨识步骤如下:

- 1° 在 $[a, b]$ 上选择互不相同的 $n+1$ 个点 $\sigma_i \neq 0$;
- 2° 将(2)式所示信号加到系统中, 量测系统输出 $y[k(q,j,i)], q=1, \dots, N, i=0, 1, \dots, n, j=0, 1, \dots, p$;
- 3° 依(9)式计算 $\Phi_N[g(j)\sigma_i]; j=0, 1, \dots, p, i=0, 1, \dots, n$;
- 4° 依(14)式计算 A^{-1} ;
- 5° 依(19)式计算 $\bar{g}(j)(N), j=0, 1, \dots, p$;
- 6° 依(21)式计算 $\bar{a}_i(N)$.

4 仿真研究^[4]

考虑如下系统的数字仿真.

非线性增益为

$$\Phi[z] = z + 0.5z^2 + 0.4z^3 + 0.3z^4 + 0.2z^5.$$

线性子系统为

$$z(k) = 1.5z(k-1) - 0.7z(k-2) + u(k-1) + 0.5u(k-2).$$

噪声为 $v(k) = 0.5e(k) + 0.25e(k-1), e(k) \sim N(0, 1), a_1 = 1$ 已知.

在仿真中, 初始值取为 $z(0) = 1.2, z(-1) = 2, u(k) = 0 (k < 0)$. 脉冲幅值取为 $\sigma_0 = 1, \sigma_1 = 1.5, \sigma_2 = 2, \sigma_3 = 3, \sigma_4 = 3.4$ 和 $\sigma_5 = 3.8$. 由于 $|g(k)| < 10^{-5} (k \geq 55)$, 所以取 $p = 55$.

从仿真结果表 1 和表 2 可看出, 只有当 N 较大时, 才能获得较高的估计精度. 事实上, 从(15)~(21)式可知 $\hat{g}(j)(N)$ 和 $\hat{a}_i(N)$ 的估计残差只依赖于 $\frac{1}{N} \sum_{q=1}^N v[k(q,j,s)]$ (这项均方收敛到零). 由于仿真中采用的噪声零均值这一条件没有得到好的保证, 所以只有在 $N = 1000$

时,才有较好的估计,为了得到好的估计值,噪声应先进行滤波.

表 1 非线性增益未知参数辨识结果

		a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
真 值		0	1	0.5	0.4	0.3	0.2
估 计 值	N=500	0.0313	1	0.5438	0.5207	0.3766	0.3189
	N=750	-0.0047	1	0.4916	0.4150	0.3126	0.1995
	N=1000	0.0007	1	0.4975	0.3973	0.2986	0.1996

表 2 脉冲响应序列辨识结果

		$g(0)$	$g(1)$	$g(2)$	$g(3)$	$g(4)$	$g(5)$	$g(6)$	$g(7)$
真 值		0	1	2	2.3000	2.0499	1.4650	0.7625	0.1183
估 计 值	N=500	0.0211	0.9525	2.0477	2.3400	2.0075	1.4998	0.7188	0.0254
	N=750	-0.0049	0.9913	2.0100	2.2940	2.0216	1.4523	0.7693	0.1324
	N=1000	0.0017	1.0014	2.0009	2.2983	2.0513	1.4677	0.7633	0.1166
		$g(8)$	$g(9)$	$g(10)$	$g(11)$	$g(12)$	$g(13)$	$g(14)$	$g(15)$
真 值		-0.3564	-0.6173	-0.6765	-0.5827	-0.4004	-0.1928	0.0089	0.1216
估 计 值	N=500	-0.3881	-0.6173	-0.6417	-0.5923	-0.4499	-0.1993	0.0842	0.1553
	N=750	-0.3510	-0.6200	-0.6680	-0.5900	-0.4118	-0.1960	0.0119	0.1290
	N=1000	-0.3583	0.6123	-0.6770	-0.8510	-0.4005	-0.1977	0.0046	0.1224
		$g(16)$	$g(17)$	$g(18)$	$g(19)$	$g(20)$	$g(21)$	$g(22)$	$g(23)$
真 值		0.1887	0.1979	0.1647	0.1086	0.0476	-0.0047	-0.0403	-0.0572
估 计 值	N=500	0.1347	0.1220	0.1977	0.1645	0.0100	-0.1011	-0.0673	-0.0813
	N=750	0.1933	0.1901	0.1677	0.1254	0.0414	-0.0017	-0.0666	-0.0542
	N=1000	0.1889	0.1926	0.1622	0.1100	0.0462	-0.0055	-0.0413	-0.0539

5 结 论

本文放弃了辨识 Wiener 模型的传统方法,提出了利用不同幅值的周期脉冲信号作辨识输入信号的辨识方法,获得了 Wiener 模型的强一致性估计,并且研究了估计残差的渐近分布以及收敛速度.

参 考 文 献

- [1] Hsia, T. C.. System Identification-Least Square Methods. Lexington Books. Toronto, 1977, chapter 8
- [2] Billings, S. A. and Fakhouri, S. Y.. Identification of Nonlinear Systems Using the Wiener Model. Electronics Letters. 1977, 13: 502-504
- [3] Jacobs, O. L. R.. Gaussian Approximation in Recursive Estimation of Multiple State of Nonlinear Wiener System. Automatica, 1988, 24: 234-247

- [4] 胡德文, 王正志. 非线性系统 Wiener 模型辨识. 自动化学报, 1991, 17: 151-159
- [5] Porat, B. and Friedlander, B.. System Identification Using Fourth-Order Cumulants with Application to Channel Equalization. IEEE Trans. Automat. Contr., 1993, AC-38: 1394-1398
- [6] 复旦大学编. 概率论. 第一册. 北京: 人民教育出版社, 1979

A New Method for Identificating Wiener Model

HUANG Zhengliang and WU Jian

(Southwest Institute of Technology • Sichan Mianyang, 621002, PRC)

WAN Baiwu

(Institute of Systems Engineering, Xi'an Jiaotong University • Xi'an, 710049, PRC)

Abstract: In this paper, a new identification technique is presented, which uses cyclic impulse signals with differnt amplitudes as input signals and has obtained strong consistence estimates of the unknown parameters of nonlinear gain and impulse responses of linear subsystem of Wiener model. Moreover the paper also studies the asymptotic distributions of estimation errors, and has obtained the convergence speed of errors. Finally, simulation results show that the proposd method is very efficient and practical.

Key words: Wiener model; impulse responses; identification

本文作者简介

黄正良 见本刊 1996 年第 1 期第 23 页.

吴 坚 见本刊 1996 年第 1 期第 23 页.

万百五 见本刊 1996 年第 1 期第 23 页.