第 13 卷第 3 期
1996 年 6 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 13, No. 3
Jun., 1996

基于输出残差的自适应状态估计方法

周 露 吴瑶华 黄文虎 闻 新
(哈尔滨工业大学航天工程与力学系・哈尔滨,150001)

摘要：本文针对线性定常离散系统提出了一种有效的基于输出残差的自适应状态估计方法.首先利用输出残差给出了卡尔曼滤波增益马尔可夫参数估计,并且得到了卡尔曼滤波增益估计,然后解决了自适应状态估计问题.最后以仿真实例说明了此方法的有效性.

关键词：自适应状态估计；卡尔曼滤波；稳态最优增益；输出残差

1 引 言

线性系统的状态空间模型借助于状态向量描述了系统的输入和输出的关系.然而,状态向量是不易被直接测量的,这样就需要对状态进行估计,在存在过程和测量噪声的情况下,卡尔曼滤波是一种有效的状态估计方法.

具有未知噪声统计的状态估计问题近些年被研究了[1~4].一般地,这些方法被分为直接方法和间接方法,直接方法是直接从数据来辨识卡尔曼滤波增益,而间接方法是首先估计过程噪声和测量噪声的协方差,然后使用它们计算卡尔曼滤波增益.直接方法的优点是估计参数少,方法简单,同时它避免了间接方法中估计过程噪声协方差的不唯一性问题.本文提的方法是利用输出残差估计卡尔曼滤波增益马尔可夫参数,进而得到卡尔曼滤波增益估计和自适应状态估计.具有卡尔曼滤波增益估计的直接方法的优点,并能在线递推实现.

2 自适应状态估计

考虑线性定常离散系统

$$\begin{cases} x(n+1) = Ax(n) + Bu(n) + \xi(n), \\ y(n) = Cx(n) + Du(n) + \eta(n) \end{cases} \tag{1}$$

过程噪声 $\xi(n)$ 和测量噪声 $\eta(n)$ 是零均值,方差阵分别为 Q 和 R 的独立的白噪声.假设 A, B,C,D 是已知的.

由卡尔曼滤波理论和系统(1)的最优预测估计方程为

$$\begin{cases} \hat{x}(n+1|n) = A\hat{x}(n|n-1) + Bu(n) + K\epsilon(n), \\ \hat{y}(n|n-1) = C\hat{x}(n|n-1) + Du(n). \end{cases} \tag{2}$$

其中 K 是稳态最优增益阵,$\epsilon(n)$ 是卡尔曼滤波残差.且 $\epsilon(n) = y(n) - \hat{y}(n|n-1)$.问题是由输入输出数据 $\{u(0), u(1), \ldots u(N), y(0), y(1), \ldots y(N)\}$ 估计状态.

将(2)式简化为两部分

$$\begin{cases} \hat{x}_1(n+1|n) = A\hat{x}_1(n|n-1) + Bu(n), \\ y_1(n) = C\hat{x}_1(n|n-1) + Du(n) \end{cases} \tag{3}$$

和

本文于 1994 年 11 月 16 日收到,1995 年 7 月 19 日收到修改稿.

$$\begin{cases}\hat{x}_2(n+1|n)=A\hat{x}_2(n|n-1)+K\varepsilon(n),\\ y_2(n)=C\hat{x}_2(n|n-1)+\varepsilon(n).\end{cases}\tag{4}$$

这里 $\hat{x}(n)=\hat{x}_1(n)+\hat{x}_2(n)$，$y(n)=y_1(n)+y_2(n)$，(3)式中的状态 $\hat{x}_1(n+1|n)$ 和输出 $y_1(n)$ 是由确定性输入 $u(n)$ 产生的，(4)式中的状态 $\hat{x}_2(n+1|n)$ 和输出 $y_2(n)$ 是由未知随机输入 $\varepsilon(n)$ 产生的.

假设初始条件 $\hat{x}_1(0)=0$，由(3)式可得

$$y_1(n)=\sum_{i=1}^{n}CA^{i-1}Bu(n-i)+Du(n),\tag{5}$$

则 $y_2(n)$ 可被计算为

$$y_2(n)=y(n)-y_1(n).\tag{6}$$

这里称 $y_2(n)$ 为输出残差.

(4)式可改写为

$$\begin{cases}\hat{x}_2(n+1|n)=(A-KC)\hat{x}_2(n|n-1)+Ky_2(n),\\ y_2(n)=C\hat{x}_2(n|n-1)+\varepsilon(n).\end{cases}\tag{7}$$

假设初始条件 $\hat{x}_2(0)=0$，由(7)式得

$$y_2(n)=\sum_{i=1}^{n}C(A-KC)^{i-1}Ky_2(n-i)+\varepsilon(n).\tag{8}$$

定义参数　$$\alpha_i=C(A-KC)^{i-1}K,\quad i=1,2,\cdots,p.\tag{9}$$

矩阵 $A-KC$ 是方程(7)式的系统矩阵，且已知(7)式是渐近稳定的，因此，对足够大的 p，

$$(A-KC)^{i-1}\approx 0,\quad i>p.\tag{10}$$

方程(8)可由参数 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,p)$ 近似为

$$y_2(n)=\sum_{i=1}^{p}\alpha_i y_2(n-i)+\varepsilon(n).\tag{11}$$

将(11)式写成矩阵形式为

$$Y=\alpha Z+\varepsilon.\tag{12}$$

这里　$Y=[y_2(0)\quad y_2(1)\quad\cdots\quad y_2(p)\quad y_2(p+1)\quad\cdots\quad y_2(N)]$，

$\alpha=[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\cdots\quad\alpha_p]$，

$$Z=\begin{bmatrix}y_2(0) & y_2(1) & \cdots & y_2(p) & y_2(p+1) & \cdots & y_2(N)\\ 0 & y_2(0) & \cdots & y_2(p-1) & y_2(p) & \cdots & y_2(N-1)\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & y_2(0) & y_2(1) & \cdots & y_2(N-p)\end{bmatrix},$$

$\varepsilon=[\varepsilon(0)\quad\varepsilon(1)\quad\cdots\quad\varepsilon(p)\quad\varepsilon(p+1)\quad\cdots\quad\varepsilon(N)]$.

(12)式中的 α 由最小二乘法估计为

$$\hat{\alpha}=YZ^{\#}.\tag{13}$$

这里 # 表示伪逆. 定义卡尔曼滤波增益马尔可夫参数

$$\beta_i=CA^{i-1}K,\quad i=1,2,\ldots,p.\tag{14}$$

利用(9)，(14)式的 α_i 和 β_i 的定义，参数 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_p$ 可由参数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$ 递推计算为

$$\beta_i = \alpha_i + \sum_{j=1}^{i-1}\beta_{i-j}\alpha_j, \quad i = 1,2,\cdots,p. \tag{15}$$

因此，卡尔曼滤波增益 K 可由卡尔曼滤波马尔可夫参数计算为

$$K = (M^{\mathrm{T}}M)^{-1}M^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_p\end{bmatrix}. \tag{16}$$

这里 $\qquad M = [C^{\mathrm{T}} \quad A^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}} \quad \cdots \quad (A^{p-1})^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}.$

系统(1)的状态估计为

$$\begin{cases}\hat{x}(n|n-1) = A\hat{x}(n-1|n-1) + Bu(n-1),\\ \hat{x}(n|n) = \hat{x}(n|n-1) + K[y(n) - C\hat{x}(n|n-1) - Du(n)].\end{cases} \tag{17}$$

将(16)式代入(17)式，递推计算可得状态估计 $\hat{x}(n|n)$.

3 仿真实例

考虑 SISO 系统(1)式. 取

$$A = \begin{bmatrix}0.985 & 0.002\\ 0 & 0.995\end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix}0.3\\ 0.5\end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0], \quad D = 0.5.$$

输入 $u(n)$ 为单位阶跃函数，初值取 $\hat{x}(1|1) = 0$，且未知方差取 $Q = \mathrm{diag}\{0.1^2, 0.1^2\}$，$R = 0.01$，递推步长为 $n = 500$，仿真结果如图1，图2所示. 图1给出了采用本文的自适应状态估计方法得到的卡尔曼滤波残差 $\varepsilon(n)$ 的自相关函数 δ_1 随 n 变化曲线. 其曲线随着 n 的增加逐渐接近于零，这表明随着递推步长的增加自相关函数的值逐渐接近于零. 图2给出了状态估计相对误差范数 δ_2 随 n 变化曲线. 定义状态估计相对误差范数 $\delta_2 = \|\hat{x} - x\| / \|x\|$，$x$ 为状态真实值，$\hat{x}$ 为 x 的估计值. 仿真结果表明了本文中算法具有良好性能.

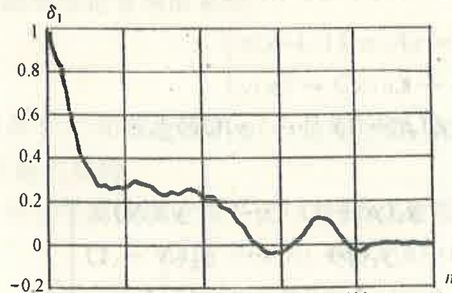

图1 δ_1 随 n 变化曲线

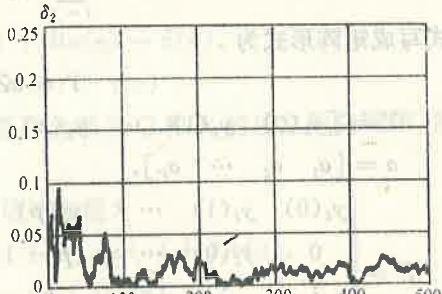

图2 δ_2 随 n 变化曲线

4 结 论

本文研究了线性定常离散系统的自适应状态估计问题，采用的方法不同于以往的自适应滤波方法，如：贝叶斯方法，极大似然法，相关法和协方差匹配法[5]，而是直接从输出残差估计卡尔曼滤波增益马尔可夫参数，然后进行卡尔曼滤波增益和状态估计，避免了估计未知噪声统计，得到的状态估计具有良好的性能.

参 考 文 献

[1] Mehra, R. K.. On the Identification of Variances and Adaptive Kalman Filtering. IEEE Trans. Automat. Contr., 1970, AC-15(2): 175—184

[2] Lee, T. T.. A Direct Approach to Identify the Noise Covariances of Kalman Filtering. IEEE Trans. Automat. Contr., 1976, AC-21(4): 841—842

[3] Tajima, K.. Estimation of Steady State Kalman Filter Gain. IEEE Trans. Automat. Contr., 1978, AC-23(5): 944—945

[4] Juang, J. N. et al.. Identification of Observer/Kalman Filter Markov Parameters: Theory and Experiments. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1993, 16(2): 320—329

[5] 陈新海. 最佳估计理论. 北京:北京航空学院出版社, 1987

Adaptive State Estimation Approach Based on Output Residuals

ZHOU Lu, WU Yaohua, HUANG Wenhu and WEN Xin

(Department of Astronautics and Mechanics, Harbin Institute of Technology • Harbin, 150001, PRC)

Abstract: In this paper, based on output residuals, an efficient adaptive state estimation approach is presented for linear time-invariant discrete system. Firstly, using output residuals, the Kalman filter gain Markov parameters are estimated. Secondly the Kalman filter gain estimation is obtained. Thirdly, the adaptive state estimation problem is solved. Finally, simulation example is given to demonstrate the effectiveness of this method.

Key words: adaptive state estimation; Kalman filter; steady-state optimal gain; output residuals

本文作者简介

周　露　1963 年生. 1986 年和 1993 年分别在辽宁师范大学和黑龙江大学获得数学系学士学位和自动控制理论及其应用专业硕士学位. 现正在尔滨工业大学航天工程与力学系攻读博士学位. 研究领域为系统辨识, 参数估计和状态估计等.

吴瑶华　1926 年生. 教授. 博士生导师. 1949 年毕业于南京大学, 1955 年任讲师, 1962 年任副教授, 1985 年任教授. 研究领域为飞行器的系统辨识和参数估计及长期从事飞行力学方面的科研工作.

黄文虎　1926 年生. 教授, 博士生导师, 中国工程院院士. 1949 年毕业于浙江大学, 1955 年任讲师, 1962 年任副教授, 1978 年任教授, 担任过教研室主任、系副主任、校长等职. 长期从事机械振动, 结构动力学, 一般力学, 特别是振动系统的故障诊断, 参数识别方面的研究工作.

闻　新　1961 年生. 1984 年和 1993 年分别在沈阳建工学院和哈尔滨工业大学获得学士学位和硕士学位. 目前在哈尔滨工业大学控制工程系攻读博士学位, 研究领域为容错控制, 故障诊断及工业过程控制.