非线性系统在乘积空间中的实用稳定性：直接方法

楚天广　　王照林
(北京大学力学系·北京, 100871)　(清华大学工程力学系·北京, 100084)

摘要：本文研究非线性系统在乘积空间中的实用稳定性．利用向量辅助函数和适当的单调函数类，提出一种以微分比较原理和基本的单调性准则为基础的直接方法．它将问题归结为一组微分或积分（特殊地，代数）不等式条件，可以直接根据系统方程进行检验而无须引入并求解任何形式的比较系统，便于实际应用．文中给出了示例．

关键词：非线性系统；乘积空间；实用稳定性；向量直接方法；单调函数类

1　引　言

实用稳定性问题的研究源于早期 Chetaev(1937)、Moiseyev(1945) 等关于"有限时间稳定性"和"技术稳定性"的工作[1~3]，其特点是定量刻画系统在有限扰动下的运动性态．在机器人、弹性飞行器等复杂系统动力学与控制问题中，实用稳定性理论有着重要的应用[1~6]．

本文考虑非线性系统在乘积空间中的实用稳定性．目前这类问题大多通过引入并求解比较系统来判断原系统的实用稳定性[2,4]．如何直接由系统方程本身判断其实用稳定性仍然值得研究．本文基于微分不等式理论提出一种实用稳定性直接方法，在不引入任何形式的比较系统的情况下，建立实用稳定性直接判据．

2　问题表述

考虑非线性系统及其分解子系统

$$\dot{x} = f(t,x), \tag{1}$$

$$\dot{x}_i = g_i(t,x_i) + h_i(t,x), \quad i = 1,\cdots,k. \tag{2}$$

其中 $x_i \in B_i(H) = \{x_i \in \mathrm{R}^{n_i} \mid \|x_i\| < H\}$，$\sum_{i=1}^{k} n_i = n$，$x = (x_1^{\mathrm{T}},\cdots,x_k^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$，$g_i \in C(\mathrm{R}_+ \times B_i(H),\mathrm{R}^{n_i})$，$h_i \in C(\mathrm{R}_+ \times B(H),\mathrm{R}^{n_i})$．当耦合函数 $h_i(t,x) \equiv 0$ 时得解耦子系统

$$\dot{x}_i = g_i(t,x_i), \quad i = 1,\cdots,k. \tag{3}$$

系统(1)的解为 $x(t,t_0,x_0) = (x_1^{\mathrm{T}}(t,t_0,x_0),\cdots,x_k^{\mathrm{T}}(t,t_0,x_0))^{\mathrm{T}}$．记 Ω_i 为 R^{n_i} 中所有有界非空子集类，其中取 Hausdorff 拟度量．对于 $i = 1,\cdots,k$，设集值函数 $S_0^i, S^i \in C(\mathrm{R}_+,\Omega_i)$，对于 $t \in \mathrm{R}_+$，满足 $S_0^i(t) \subset S^i(t)$，$\partial S_0^i(t) \cap \partial S^i(t) = \emptyset$．初始时间 $t_0 \in \mathrm{R}_+$，时间区间 $T = [t_0, t_0 + \tau]$，其中 $\tau > 0$ 为有限数或 ∞．规定系统(1)在乘积空间 $\prod_{i=1}^{k}\mathrm{R}^{n_i}$ 中的估计区域：初始状态集合 $S_0(t_0) = \prod_{i=1}^{k} S_0^i(t_0)$ 和容许状态集合 $S(t) = \prod_{i=1}^{k} S^i(t)$．常见的如：

$$S_\alpha(t) = \prod_{i=1}^{k}\{x \in \mathrm{R}^n \mid \|x_i\| < \alpha_i(t)\},$$

* 国家自然科学基金(重点项目)与中国博士后科学基金资助项目．
本文于 1995 年 3 月 4 日收到．1995 年 9 月 29 日收到修改稿．

$$S_\beta(t) = \prod_{i=1}^{k}\{x \in \mathrm{R}^n \mid \|x_i\| < \beta_i(t)\}. \tag{4}$$

其中 $0 < \alpha(t) = (\alpha_1(t), \cdots, \alpha_k(t))^{\mathrm{T}} < \beta(t) = (\beta_1(t), \cdots, \beta_k(t))^{\mathrm{T}}$(按分量意义,下同)均为有界连续向量函数,等等.

定义 如果对 $x_0 \in S_0(t_0)$ 有 $x(t,t_0,x_0) \in S(t)(t \in T)$,则系统(1)关于$\{S_0(t_0), S(t), T, t_0\}$实用稳定;如果对于 $\forall\, t_0 \in \mathrm{R}_+$ 均如此,则系统(1)关于$\{S_0(t), S(t), T\}$拟实用一致稳定;如果 S_0 和 S 还是定常集合,则为实用一致稳定.

设向量函数 $V(t,x) = (V_1(t,x_1), \cdots, V_k(t,x_k))^{\mathrm{T}}, V_i \in C(\mathrm{R}_+ \times B_i(H), \mathrm{R})$ 满足关于 x_i 的局部 Lipschitz 条件,记作 $V \in C(\mathrm{R}_+ \times B(H), \mathrm{R}^k) \cap \mathrm{Lip}(x)$,则下列极限存在:

$$D_{(2)}^{-}V_i(t,x_i) = \lim_{\delta \to 0+} \sup\{\delta^{-1}[V_i(t,x_i) - V_i(t-\delta, x_i - \delta(g_i + h_i))]\}, i = 1, \cdots, k.$$

记 $D_{(1)}^{-}V(t,x) = (D_{(2)}^{-}V_1(t,x_1), \cdots, (D_{(2)}^{-}V_k(t,x_k))^{\mathrm{T}}$, $D^{-}\gamma(t) = (D^{-}\gamma_1(t), \cdots, D^{-}\gamma_k(t))^{\mathrm{T}}$ 为 $\gamma \in C(\mathrm{R}_+, \mathrm{R}^k)$ 的(向量值)Dini 导数. 下列性质成立[8]:

P_1) 若 $l_i(t)$为 V_i 关于 x_i 的局部 Lipschitz 系数,则

$$D_{(2)}^{-}V_i(t,x_i) \le D_{(3)}^{-}V_i(t,x_i) + l_i(t)\|h_i(t,x)\|.$$

P_2) 若 $x(t,t_0,x_0) = (x_1^{\mathrm{T}}(t,t_0,x_0), \cdots, x_k^{\mathrm{T}}(t,t_0,x_0))^{\mathrm{T}}$ 是系统(1)的解,记 $x_i(t) \equiv x_i(t,t_0,x_0)$, $V_i(t) \equiv V_i(t,x_i(t))$,则 $D_{(2)}^{-}V_i(t,x_i(t)) = D^{-}V_i(t)$.

对于向量函数 $w \in C(\mathrm{R}_+ \times \mathrm{R}^k, \mathrm{R}^k)$,如果 $p \le q$ 时有 $w(t,p) \le w(t,q)(t \in \mathrm{R}_+)$,则称 $w(t,u)$ 关于 u 单调不减,记为 $w \in \mathscr{W}_1$;如果 $p \leqslant q$ 并且 $p_i = q_i$ 时有 $w_i(t,p) \leqslant w_i(t,q)(t \in \mathrm{R}_+, 1 \le i \le k)$,则称 $w(t,u)$ 关于 u 拟单调不减,记为 $w \in \mathscr{W}_2$. 显然 $\mathscr{W}_1 \subset \mathscr{W}_2$.

以下向量比较原理和单调性准则(参见文献[8])是本文直接方法的理论基础.

引理 1(向量比较原理) 设 $V \in C(\mathrm{R}_+ \times B(H), \mathrm{R}^k)$ 是系统(1)的解,满足条件:

1° $D_{(1)}^{-}V(t,x) \le w(t, V(t,x)), t \in (t_0, t_*]$;

2° $w(t,u(t)) < D^{-}u(t), t \in (t_0, t_*]$;

3° $V(t_0,x_0) < u(t_0)$,

则 $V(t,x(t,t_0,x_0)) < u(t), t \in (t_0, t_*]$.

引理 2(单调性准则) $\gamma \in C([a,b], \mathrm{R}^k)$ 单调不增当且仅当 $D\gamma(t) \le 0 (t \in (a,b])$.

最后引入以下符号,其中 $i = 1, \cdots, k$,并且不妨假设均为 t 的连续函数.

$$V_M^{S_0}(t) = (V_{1,M}^{S_0}(t), \cdots, V_{k,M}^{S_0}(t))^{\mathrm{T}}, \text{其中 } V_{i,M}^{S_0}(t) = \sup\{V_i(t,x_i) \mid x_i \in S_0^i(t)\},$$

$$V_M^{\bar{S}_0}(t) = (V_{1,M}^{\bar{S}_0}(t), \cdots, V_{k,M}^{\bar{S}_0}(t))^{\mathrm{T}}, \text{其中 } V_{i,M}^{\bar{S}_0}(t) = \sup\{V_i(t,x_i) \mid x_i \in \bar{S}_0^i(t)\},$$

$$V_m^{\partial S}(t) = (V_{1,m}^{\partial S}(t), \cdots, V_{k,m}^{\partial S}(t))^{\mathrm{T}}, \text{其中 } V_{i,m}^{\partial S}(t) = \inf\{V_i(t,x_i) \mid x_i \in \partial S^i(t)\}.$$

3 实用稳定性直接判据

首先由引理 1 得以下微分形式的向量直接判据.

定理 1 设有 $V \in C(\mathrm{R}_+ \times B(H), \mathrm{R}^k) \cap \mathrm{Lip}(x), w \in \mathscr{W}_2$,满足条件:

1° $D_{(1)}^{-}V(t,x) \le w(t, V(t,x)), (t,x) \in T \times S(t)$;

2° $w(t, V_m^{\partial S}(t)) < D^{-}V_m^{\partial S}(t), t \in T$;

3° $V_M^{S_0}(t_0) < V_m^{\partial S}(t_0)$,

则系统(1)关于$\{S_0(t_0), S(t), T, t_0\}$实用稳定. 如果对于 $\forall\, t_0 \in \mathrm{R}_+$ 均有上述条件成立,则系统(1)关于$\{S_0(t), S(t), T\}$拟实用一致稳定.

证　只需证明实用稳定性．如果结论不成立，则根据连续性必有某 $x_0 \in S_0(t_0)$，$t_0 \le t_1 < t_0 + \tau$ 和某个 $1 \le i \le k$ 使 $x(t,t_0,x_0) \in S(t)(t \in [t_0,t_1))$，$x_i(t_1,t_0,x_0) \in \partial S^i(t_1)$．

然而，注意到 $V(t_0,x_0) < V_m^{as}(t_0)$，由条件 1° ～ 3° 根据引理 1 得 $V(t,x(t,t_0,x_0)) < V_m^{as}(t)(t \in [t_0,t_1])$．故对 $t = t_1$ 及上述 i 有 $V_i(t_1,x_i(t_1,t_0,x_0)) < V_{i,m}^{as}(t_1)$，这与 $x_i(t_1,t_0,x_0) \in \partial S^i(t_1)$ 矛盾．定理 1 得证．

定理 2　设有 $V \in C(\mathrm{R}_+ \times B(H),\mathrm{R}^k) \cap \mathrm{Lip}(x)$，$w \in \mathscr{W}_2$，满足条件：

1° $D_{(1)}^- V(t,x) \le w(t,V(t,x))$，$(t,x) \in R_+ \times [S(t) - \bar{S}_0(t)]$；

2° $w(t,V_m^{as}(t)) < D^- V_m^{as}(t)$，$t \in \mathrm{R}_+$；

3° $V_M^{S_0}(t) < V_m^{as}(t)$，$t \in \mathrm{R}_+$，

则系统(1)关于$\{S_0(t),S(t),T\}$拟实用一致稳定．(证明类似，从略)

根据引理 2 可得积分形式的向量直接判据．

定理 3　设有 $V \in C(\mathrm{R}_+ \times B(H),\mathrm{R}^k) \cap \mathrm{Lip}(x)$，$w \in \mathscr{W}_2$，满足条件：

1° $D_{(1)}^- V(t,x) \le w(t,V(t,V(t,x)))$，　$(t,x) \in T \times S(t)$；

2° $\displaystyle\int_{t_0}^{t} w(\sigma,V_m^{as}(\sigma))\mathrm{d}\sigma < V_m^{as}(t) - V_M^{S_0}(t_0)$，　$t \in T$，

则系统(1)关于$\{S_0(t_0),S(t),T,t_0\}$实用稳定．如果对于 $\forall\, t_0 \in \mathrm{R}_+$ 均有上述条件成立，则系统(1)关于$\{S_0(t),S(t),T\}$拟实用一致稳定．

证　类似定理 1 的证明，如果结论不成立，则必有某 $x_0 \in S_0(t_0)$，和 $t_1 \in T$ 以及 $1 \le i \le k$，使 $x(t,t_0,x_0) \in S(t)(t \in [t_0,t_1))$ 且 $x_i(t_1,t_0,x_0) \in \partial S_i(t_1)$．

然而，令 $V(t) = V(t,x(t,t_0,x_0))$，可以证明 $V(t) < V_m^{as}(t)(t \in [t_0,t_1])$．

事实上，由条件 2° 知 $V(t_0) \le V_M^{S_0}(t_0) < V_m^{as}(t_0)$．根据连续性有 $c > 0$，在$[t_0,t_0+c]$上 $V(t) < V_m^{as}(t)$．如果 $t_0 + c < t_1$，则必有 $t_0 \le t \le t_1$ 和 $1 \le j \le k$ 使 $V(t) < V_m^{as}(t)(t \in [t_0,t_2))$ 且 $V_j(t_2) = V_{j,m}^{as}(t_2)$．但由条件 1° 和性质 P_2) 不难验证

$$D^-\left[V(t) - \int_{t_0}^{t} w(\sigma,V(\sigma))\mathrm{d}\sigma\right] \le 0,\quad t \in (t_0,t_1).$$

由引理 2 以及 w 的单调性和条件 2°得

$$V_j(t_2) \le V_j(t_0) + \int_{t_0}^{t_2} w_j(\sigma,V(\sigma))\mathrm{d}\sigma \le V_{j,M}^{S_0}(t_0) + \int_{t_0}^{t_2} w_j(\sigma,V_m^{as}(\sigma))\mathrm{d}\sigma < V_{j,m}^{as}(t_2),$$

矛盾．故得 $V(t_1) < V_m^{as}(t_1)$，矛盾．定理 3 得证．

注记 1　类似定理 3，将定理 2 的条件 2°和 3°改为以下条件，结论仍然成立．

2°　$\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} w(\sigma,V_m^{as}(\sigma))\mathrm{d}\sigma < V_m^{as}(t_2) - V_M^{S_0}(t_1)$，　$0 \le t_1 < t_2$.

注记 2　所谓“微分或积分形式的直接判据”系指上述定理中条件 2°的具体表述形式．在应用时条件 2°中的量可根据所取 V 函数先行计算确定再代入检验．它取代了以往文献中的“比较系统”，避免了引入与之有关的各种假设条件．这正是本文“直接方法”的基本思想．对于特殊情况 $w(t,u) \equiv w(t)$，文献[2,4]等曾给出与定理 3 类似的结果．

下面考虑由(4)式所给区域．利用解耦子系统的正定 V 函数，根据性质 P_1)和引理 1 不难证明如下结论．

定理 4 对于 $i=1,\cdots,k$,设有 $V_i\in C(\mathrm{R}_+\times B_i(H),\mathrm{R}_+)$ 且Lipschitz 系数为 $l_i(t)$,a_i,$b_i\in\mathscr{K}$($\mathscr{K}$ 类函数[1]),$c_i\in C(\mathrm{R}_+\times \mathrm{R},\mathrm{R})$,$\tilde{h}_i\times C(\mathrm{R}_+\times \mathrm{R}^k,\mathrm{R})$ 且 $\tilde{h}_i(t,u)$ 关于 u 单调不减,对于 $(t,x_i)\in T\times B_i(H)$,满足条件:

$1°\ a_i(\|x_i\|)\leq V_i(t,x_i)\leq b_i(\|x_i\|)$;

$2°\ D^-_{(3)}V_i(t,x_i)\leq c_i(t,V_i(t,x_i))$;

$3°\ l_i(t)\|h_i(t,x)\|\leq \tilde{h}_i(t,\|x_i\|,\cdots,\|x_k\|)$;

$4°\ b_i(\alpha_i(t_0))<a_i(\beta_i(t_0))$;

$5°\ c_i(t,a_i(\beta_i(t)))+\tilde{h}_i(t,\beta_1(t),\cdots,\beta_k(t))<D^-(a_i(\beta_i(t)))$,

则系统(1) 关于 $\{S_\alpha(t_0),S_\beta(t),T,t_0\}$ 实用稳定.

注记 3 在定理 4 中取 $\alpha(t)\equiv\alpha,\beta(t)\equiv\beta$ 均为常向量,$c_i\in C(\mathrm{R}_+,\mathrm{R})$,$\tilde{h}_i\in C(\mathrm{R}^k,\mathrm{R})$ 单调不减,条件 $2°\sim5°$ 简化如下,则系统(1) 关于 $\{S_\alpha,S_\beta,T\}$ 实用一致稳定.

$2°\ D^-_{(3)}V_i(t,x_i)\leq c_i(V_i(t,x_i))$;

$3°\ l_i(t)\|h_i(t,x)\|\leq\tilde{h}_i(\|x_i\|,\cdots,\|x_k\|)$;

$4°\ b_i(\alpha_i)<a_i(\beta_i)$;

$5°\ c_i(a_i(\beta_i))+\tilde{h}_i(\beta_1,\cdots,\beta_k)<0.$

注记 4 本文方法可用于分析非线性系统的不变集、吸引域和 Lyapunov 稳定性[7].

4 示 例

考虑时变非线性系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1=-3x_1+(e^{-t}\sin t)x_2+e^t(1+t)^{-1}(\cos 5t)x_1x_2,\\ \dot{x}_2=0.3(e^t\cos t)x_1-2x_2+e^{2t}(1+t)^{-1}(\sin 5t)x_1x_2.\end{cases}\tag{5}$$

其中 $t\in\mathrm{R}_+$. 给定估计区域:$T=[t_0,t_0+\tau)$,$t_0>5$,$\tau=\text{const}>0$,
$S_0(t)=\{x\in\mathrm{R}^2\,|\,|x_1|<2e^{-2t},|x_2|<e^{-t}\}$, $S(t)=\{x\in R^2\,|\,|x_1|<3e^{-2t},|x_2|<2e^{-t}\}$,
则系统(5) 关于 $\{S_0(t_0),S(t),T,t_0\}$ 实用稳定.

事实上由定理1,取向量函数 $V(t,x)=(V_1(t,x_1),V_2(t,x_2))^{\mathrm{T}}$,其中 $V_1(t,x_1)=e^{2t}|x_1|$,$V_2(t,x_2)=e^t|x_2|$. 则不难验证

$$D^-_{(5)}V(t,x)\leq w(t,V(t,x)),\quad (t,x)\in T\times S(t).$$

其中 $w(t,u)=(-u_1+u_2+6(1+t)^{-1},0.3u_1-2u_2+6(1+t)^{-1})^{\mathrm{T}}\in W_2$. 由计算得 $V_M^{S_0}(t)=(2,1)^{\mathrm{T}}$,$V_m^{\partial S}(t)=(3,2)^{\mathrm{T}}$. 于是

$$w(t,V_m^{\partial S}(t))<0=D^-V_m^{\partial S}(t)(t\in T),\quad V_M^{S_0}(t_0)<V_m^{\partial S}(t_0).$$

定理 1 条件全部满足,故上述结论成立.

参 考 文 献

[1] 王照林. 运动稳定性及其应用. 北京:高等教育出版社,1992

[2] Lakshmikantham, V., Leela, S. and Martynyuk, A. A.. Practical Stability of Nonlinear Systems. Singapore World Scientific, 1990

[3] LaSalle, J. P. and Lefschetz, S.. Stability by Liapunov's Direct Method with Applications. Academic Press, 1961

[4] Michel, A. N. and Miller, R. K.. Qualitative Analysis of Large-Scale Dynamical Systems. New York: Academic

Press, 1977

[5] Vukobratovic, M. and Stokic, D.. Applied Control of Manipulation Robots. Berlin: Springer-Verlag, 1987

[6] Chu Tianguang, Wang Zhaolin and Chao Shangyi. Finite-Time Stabilization of Aeroelastic Systems via Linear State-Feedback. in Preprints of IFAC IACA '95, Beijing, 209—213

[7] 王照林，楚天广．向量 V 函数方法与时变非线性大系统的轨线性态．非线性动力学学报，1994，1(3)：209—213

[8] Lakshmikantham, V. and Leela, S.. Differential and Integral Inequalities. Academic Press, NY. 1969, I

A Direct Approach to Practical Stability of Nonlinear Systems on Product Spaces

CHU Tianguang

(Department of Mechanics, Peking University · Beijing, 100871, PRC)

WANG Zhaolin

(Department of Engineering Mechanics, Tsinghua University · Beijing, 100084, PRC)

Abstract: This paper deals with the problem of practical stability of nonlinear systems on product spaces. Based on differential comparison principle and the basic monotonicity condition, a vector direct method is proposed in terms of vector auxiliary functions and proper class of monotonic functions. This method reduces the problem to verifying a set of differential or integral (specially, algebric) inequalities directly according to equations of the system under consideration, without requiring knowledge of solutions of any so-called "comparison systems" as that in many previous works. An illustrative example is worked out to demonstrate the availability of the presently proposed method.

Key words: nonlinear system; practical stability; product spaces; vector direct method; monotonic function class

本文作者简介

楚天广　1964 年出生．1993 年毕业于清华大学工程力学系，获工学博士学位．现在北京大学力学系做博士后研究．专业方向：复杂系统动力学与控制．研究兴趣：稳定性与最优控制，动态过程的定性与定量分析方法．非线性系统动力学等．目前从事不确定系统族与鲁棒控制方面的研究．

王照林　1928 年出生．现为清华大学工程力学系教授，博士生导师，中国力学学会理事．研究领域：复杂系统动力学与控制，充液系统晃动动力学与控制．