非线性系统的状态反馈大范围输出调节

马晓军　　文传源

(北京航空航天大学自动控制系·北京,100083)

摘要：本文首先定义了状态反馈大范围输出调节,然后用常微分方程的不变流形理论对该问题进行了深入的探讨,指出非线性系统状态反馈大范围输出调节问题可解的充要条件是满足某个非线性时变偏微分方程.

关键词:非线性系统;不变流形;状态反馈;大范围输出调节

1 引　言

众所周知,使被控对象的输出跟踪(抑制)某个外系统产生的参考信号(扰动信号)是控制理论中的一个重要问题,该问题被称为输出调节问题.

针对线性系统,Francis, Wonham 和 Hautus 对这一问题进行了深入的研究;针对非线性系统,许多学者对输出调节问题也进行了研究,其中 Isidori 和 Byrnes 为解决非线性系统的输出调节问题作出了突出的贡献,但文献[1]给出的结果只在平衡点的邻域局部地成立.本文首先定义了状态反馈大范围输出调节,然后用常微分方程的不变流形理论对该问题进行了深入的探讨,给出了非线性系统状态反馈大范围输出调节问题可解的充要条件.

2 问题描述

考虑如下形式的非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,\omega,u), \quad x(0) = x_0, \\ \dot{\omega} = r(\omega), \quad \omega(0) = \omega_0, \\ e = h(x,\omega). \end{cases} \tag{1}$$

其中对象状态 $x \in \mathbb{R}^n$,输入 $u \in \mathbb{R}^m$;外系统(exosystem)状态 $\omega \in \mathbb{R}^q$;输出误差 $e \in \mathbb{R}^l$. $f(x,\omega,u)$ 是定义在 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^m$ 空间上的光滑函数且 $f(0,0,0) = 0$;$r(\omega)$ 是定义在 $\mathbb{R}^q$ 空间上的光滑函数且 $r(0) = 0$;$h(x,\omega)$ 是定义在 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q$ 空间上的光滑函数且 $h(0,0) = 0$.

假设 1　集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^q$ 是外系统 $\dot{\omega} = r(\omega)$ 的不变集.

定义 1　状态反馈大范围输出调节:反馈控制律 $u = \theta(t,x,\omega)$ 使得闭环系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f[x,\omega,\theta(t,x,\omega)] = f_c(t,x,\omega), \quad x(0) = x_0, \\ \dot{\omega} = r(\omega), \quad \omega(0) = \omega_0, \\ e = h(x,\omega) \end{cases} \tag{2}$$

具有如下特性

P1:方程

$$\dot{x} = f[x,0,\theta(t,x,0)]$$

的平衡点 $x = 0$ 是全局一致渐近稳定的.

本文于 1994 年 9 月 19 日收到. 1995 年 12 月 22 日收到修改稿.

P2：系统(2)的定义在集合$\{(t,\omega):t\geqslant 0,\omega\in\Omega\}$上的不变流形$x=S(t,\omega)$是全局吸引的，即对于任意的$[x(0),\omega(0)]\in R^n\times\Omega$，系统(2)的解$[x(t),\omega(t)]$使得$x(t)-S(t,\omega)$指数地衰减到零．

P3：对于任意的$[x(0),\omega(0)]\in R^n\times\Omega$，系统(2)的解$[x(t),\omega(t)]$使得

$$\lim_{t\to\infty}h[x(t),\omega(t)]=0.$$

其中$\theta(t,x,\omega)$是定义在$R^+\times R^n\times\Omega$空间上的光滑函数且$\theta(t,0,0)=0$对于$t$一致地成立，使得$(x,\omega)=(0,0)$是闭环系统的唯一平衡点．

3 状态反馈大范围输出调节问题的求解

本节讨论状态反馈大范围输出调节问题可解的充要条件，用W_0表示初始点ω_0的集合，定义集合

$$W=\{(t,\omega):\omega_0\in W_0,t\in[0,T],\omega=\omega(t,\omega_0)\}.$$

令集合

$$W_t=\{\omega:(t,\omega)\in W\}$$

表示集合W在时刻t的截面．取外系统$\dot{\omega}=r(\omega)$的不变集$\Omega\overset{\text{def}}{=\!=}\bigcup_{t\in[0,T]}W_t$．首先给出如下假设：

假设2 未扰对象$\dot{x}=f(x,0,u)$是可以全局渐近镇定的；

假设3 外系统$\dot{\omega}=r(\omega)$所对应的变分方程(variational equation)

$$\dot{\nu}=\frac{\partial r}{\partial\omega}[\omega(t,\omega_0)]\nu \tag{3}$$

的基本矩阵解ψ_ν满足

$$\|\psi_\nu(t,\tau)\|\leqslant\gamma_\nu e^{-\alpha(t-\tau)},\quad 0\leqslant t\leqslant\tau. \tag{4}$$

其中$\gamma_\nu>0$，并且该不等式对于$\forall\ \omega_0\in W_0$都成立；

假设4 闭环对象$\dot{x}=f_c(t,x,\omega)$所对应的齐次变分方程

$$\dot{\mu}=\frac{\partial f_c}{\partial x}[t,x(t,\omega_0),\omega(t,\omega_0)]\mu \tag{5}$$

的基本矩阵解ψ_μ满足

$$\|\psi_\mu(t,r)\|\leqslant\gamma_\mu e^{-\beta(t-r)},\quad 0\leqslant r\leqslant t. \tag{6}$$

其中$\gamma_\mu>0,\beta>0$，并且该不等式对于$\forall\ \omega_0\in W_0$都成立。

定理1 在假设1、假设2、假设3和假设4成立的条件下，如果$\alpha<\beta$，则状态反馈大范围输出调节问题可解的充要条件是存在着光滑映射$x=S(t,\omega)$且$S(t,0)=0$和$u=C(t,\omega)$且$C(t,0)=0$满足

$$\frac{\partial S}{\partial t}(t,\omega)+\frac{\partial S}{\partial\omega}(t,\omega)r(\omega)=f[S(t,\omega),\omega,C(t,\omega)], \tag{7a}$$

边界条件为$S(0,\omega)=s(\omega)$

$$\lim_{t\to\infty}h[S(t,\omega),\omega]=0. \tag{7b}$$

证 必要性.

根据文献[2]，可知闭环系统(2)一定存在着不变流形$x=S(t,\omega)$且$S(t,0)=0$，令

$$\theta(t,x,\omega)=\theta[t,S(t,\omega),\omega]=C(t,\omega).$$

显然有 $C(t,0)=0$，则(7a) 式成立．

通过选择映射 $\omega_0 \to x_0 = s(\omega_0)$，$\omega_0 \in W_0$，可以使得 $x_0 \in \mathbf{R}^n$，即 $[x(0),\omega(0)] \in \mathbf{R}^n \times W_0 \subset \mathbf{R}^n \times \Omega$，根据特性 P2 和 P3，可以推出(7b) 式成立.

充分性.

根据假设 2，可知存在着状态反馈 $u=k(x)$ 且 $k(0)=0$，使得

$$\dot{x}=f[x,0,k(x)]$$

的平衡点 $x=0$ 是全局渐近稳定的．

若存在着光滑映射 $x=S(t,\omega)$ 且 $S(t,0)=0$ 和 $u=C(t,\omega)$ 且 $C(t,0)=0$ 使得(7a) 式成立，令

$$\theta(t,x,\omega)=C(t,\omega)+k[x-S(t,\omega)],$$

则有

$$\theta(t,x,0)=k(x).$$

显然，该控制律使得特性 P1 成立．

假设 3 和假设 4 成立并且有 $\alpha<\beta$，可以找到一个 β'，满足

$$\beta'>0,\quad \alpha'=\alpha<\beta'<\beta.$$

通过选择 $\omega_0 \to x_0 = s(\omega_0)$，$\omega_0 \in W_0$，可以使得 $x_0 \in \mathbf{R}^n$,，根据文献[2,p150]的命题 B. 5. 1，可知系统(2) 的满足初始条件 $[x(0),\omega(0)] \in \mathbf{R}^n \times \Omega$ 的解 $[x(t),\omega(t)]$ 满足

$$\|\Delta(t)\| = \|x-S(t,\omega)\| \leqslant \gamma_r \|\Delta(0)\| e^{-\beta' t}.$$

即特性 P2 成立.

当 $t\to\infty$ 时，$x(t)=S(t,\omega)$，则

$$\lim_{t\to\infty} h[x(t),\omega(t)] = \lim_{t\to\infty} h[S(t,\omega),\omega(t)].$$

根据(7b)式，可知

$$\lim_{t\to\infty} h[x(t),\omega(t)]=0.$$

即特性 P3 成立. 所以，状态反馈大范围输出调节问题可解．

注 1　本文仅要求外系统 $\dot{\omega}=r(\omega)$ 存在不变集，而不必要求外系统是稳定的，并且外系统的信号并不局限于外系统平衡点的邻域，可以有较大的范围，这些要求比文献[1]对外系统的要求弱得多；

注 2　对象的状态并不局限于平衡点的邻域，可以属于 $\mathbf{R}^n$ 空间；

注 3　本文对 α 的正负号没有要求，若 $\alpha<0$，从(4)式可以形象地理解外系统是收敛的；若 $\alpha>0$，从(4)式可以形象地理解外系统是发散的；

注 4　$\alpha<\beta$ 的要求可以这样形象地理解：当外系统的发散速度小于对象的收敛速度时，是可以进行输出调节的.

4　结　论

在一定的假设条件下，非线性系统的状态反馈大范围输出调节问题的可解性等价于某个非线性时变偏微分方程的可解性. 本文对外系统的要求比文献[1]对外系统的要求弱，外系统的信号并不局限于外系统平衡点的邻域，可以有较大的范围，也不必要外系统是稳定的，这对于实际是很有意义的．但是，假设 4 是一个较强的限制条件，如何放宽这个限制条

件,则是需要进一步研究的问题.

参考文献

[1] Isidori, A. and Byrnes, C. I.. Output Regulation of Nonlinear Systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1990, AC-35(2):131—140

[2] Knobloch, H. W., Isidori, A. and Flockerzi, D.. Topics in Control theory. Birkhaüser Verlag: Basel Boston Berlin, 1992

[3] Knobloch, H. W.. Foundation of Invariant Manifold Theory for Ordinary Differential Equations, in Recent Trends in Differential Equations (R. P. Agarwal ed.). World Scientific Series in Applicable Analysis, Singapore, 1992, 1:365—392

[4] Knobloch, H. W.. Invariant Manifolds for Ordinary Differential Equations, Differential Equations and Mathematical Physics (C. Bennewitz ed.). Mathematics in Science and Engineering. Academic Press, Boston, 1991, 186:121—149

The Large Range Output Regulation Using the State Feedback for Nonlinear Systems

MA Xiaojun　and　WEN Chuanyuan

(Department of Automatic Control, Beijing University of Aeronautics and Astronautics · Beijing, 100083, PRC)

Abstract: In this paper, the definition of the large range output regulation using the state feedback for nonlinear systems is given at first, and then the problem is discussed using the invariant manifold theory of the ordinary differential equation. It is shown that, under standard assumptions, the problem is solvable if and only if a certain nonlinear time-varying partial differential equation is solvable.

Key words: nonlinear system; invariant manifold; state feedback; large range output regulation

本文作者简介

马晓军　1969年生. 1990年毕业于北京航空航天大学自动控制系飞行器控制专业, 1992年获该校计算机控制专业硕士学位, 1992年6月在北京航空航天大学飞行器控制、制导与仿真专业攻读博士学位. 主要研究兴趣: 飞行器控制和制导, 神经网络控制, 鲁棒控制, 非线性系统的输出调节及跟踪.

文传源　1918年生. 1943年毕业于西北工学院. 现任北京航空航天大学教授、博士生导师. 主要研究方向有分散化、综合化控制与可靠性, 系统仿真, 专家系统与智能控制, 系统论与人体科学.