第13卷第3期　　控制理论与应用　　Vol. 13, No. 3
1996年6月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　Jun., 1996

一类参数不确定非线性系统的鲁棒稳定性*

严星刚　井元伟　张嗣瀛
(东北大学自动控制系·沈阳,110006)

摘要：本文分析了一类参数不确定非线性系统，给出了其鲁棒稳定性的若干判据，为寻找非线性系统的参数鲁棒空间提供了一种途径．最后通过简单数值算例说明了本文结论的有效性．

关键词：不确定非线性系统；鲁棒稳定性；奇异值

1　介　　绍

鲁棒性问题一直是控制理论界研究的一个重要课题，特别是近几年来，关于不确定线性定常系统的鲁棒稳定性研究取得了许多成果[1~3]，对于不确定线性时变系统的研究也取得了一些进展[4,5]，但由于非线性系统本身的复杂性，因而关于非线性不确定系统鲁棒稳定性的研究结果则很少．我们知道，参数不确定系统鲁棒稳定性研究的主要任务是寻求较大甚至最大参数鲁棒界或参数鲁棒空间．[3]基于排零原理对参数不确定线性定常系统给出了若干鲁棒稳定性判断，本文将对一类参数不确定非线性系统进行研究，给出其鲁棒稳定性的若干判据．结果表明，本文所得结论具有一定的价值和意义．

2　系统描述及预备知识

考虑如下参数不确定非线性系统

$$\dot{x} = Ax + \sum_{j=1}^{k}\varepsilon_j g_j(x). \tag{2.1}$$

其中 $x \in \Omega \in \mathrm{R}^n$ 是 n 维状态向量，Ω 是 $x=0$ 的一邻域，$g_j(x)$ 是定义在 Ω 上的 n 维光滑向量场，$g_j(0)=0$，$\varepsilon_j(j=1,2,\cdots,k)$ 是不确定参数，A 是 Hurwitz 稳定阵，即 A 的特征值均具有负实部．

注 2.1　$g_j(x)$ 的光滑性保证了系统(2.1)的解对初值的唯一性，$g_j(0)=0\ (j=1,2,\cdots,k)$ 保证了 $x=0$ 是系统(2.1)在 Ω 上的受扰不变平衡点．

注 2.2　对于一般的非线性系统

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{j=1}^{k}\varepsilon_j \Psi_j(x). \tag{2.2}$$

(其中 $f(x)$，$\Psi_j(x)$ 是 $x=0$ 某邻域 U 上的光滑向量场，$f(0)=\Psi_j(0)=0$，$\varepsilon_j(j=1,2,\cdots,k)$ 是不确定参数)在一定条件下(比如：存在 n 个在 U 上线性无关且两两可交换的向量场 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，使 $[f(x),X_i]=0\ (i=1,2,\cdots,n)$)，则系统(2.2)的鲁棒稳定性问题可通过微分同胚转化为系统(2.1)的鲁棒稳定性问题。所以研究系统(2.1)具有更广泛的意义．

注 2.3　若系统(2.1)中 $g_j(x)=B_jx$，其中 $B_j(j=1,2,\cdots,k)$ 是与 A 同阶常值阵．则

* 国家自然科学基金，博士点基金资助项目．
本文于1994年11月28日收到．1995年5月23日收到修改稿．

系统(2.1)转化为[3]曾研究过的线性定常不确定系统

$$\dot{x}=(A+\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i B_i)x. \tag{2.3}$$

故(2.3)是(2.1)的一种特例.

定义 2.1[6] 设$D(x)(x\in\Omega)$是$m\times n$阶函数阵,对每一固定的$x\in\Omega$,,$D^\tau(x)D(x)$的特征值记为$\lambda_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$,则称$\alpha_i(x)=\sqrt{\lambda_i(x)}(i=1,2,\cdots,n)$为$D(x)$的奇异值.

为简便起见,引入如下记号:$\delta_M(D(x))$表示对每一固定$x\in\Omega$,$D(x)$的n个奇异值中的最大者;$P^{\frac{1}{2}}$表示矩阵Q,如果$Q^\tau Q=P$;如果存在n阶正定常值阵L,使$L-A(x)$对任一$x\in\Omega$都是正定阵,(其中$A(x)$是定义在Ω上n阶方阵)则记为:$A(x)<L$.

注 2.4 由于$D^\tau(x)D(x)$的特征值皆非负,所以$\delta_M(D(x))$实质上是定义在Ω上的实值函数.

引理 2.1[6] 设$D(x)(x\in\Omega)$是$m\times n$函数阵.则

$$\|D(x)\|=\delta_M(D(x)),\quad (x\in\Omega).$$

3 系统鲁棒性的若干结果

下面研究系统(2.1)的鲁棒稳定性问题.由于系统(2.1)中的矩阵A是Hurwitz稳定阵,所以对任意n阶正定阵Q,必有唯一正阶阵P,满足

$$A^\tau P+PA=-Q, \tag{3.1}$$

于是,我们有如下结论:

定理 3.1 对系统(2.1),设

$$g_j(x)=R_j(x)x,\quad x\in\Omega,\quad (j=1,2,\cdots,k), \tag{3.2}$$

$$H_j(x)=R_j^\tau(x)P+PR_j(x),\quad x\in\Omega,\quad (j=1,2,\cdots,k). \tag{3.3}$$

其中P由(3.1)确定.如果对任意的$x\in\Omega$有

$$\delta_M(\sum_{j=1}^{k}\varepsilon_j[(Q^{-\frac{1}{2}})^\tau H_j(x)Q^{-\frac{1}{2}}])<1, \tag{3.4}$$

则$x=0$是系统(2.1)在Ω上的渐近稳定平衡点.

注 3.1 (3.2)式中$R_j(x)$可通过下式求出

$$R_j(x)=\begin{cases}\dfrac{g_j(x)}{\|x\|^2}x^\tau, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}\qquad (j=1,2,\cdots,k,\quad x\in\Omega).$$

也可用观察方法或其它方法求出.

证 对系统(2.1)构造如下的Lyapunov函数

$$V(x)=x^\tau Px.$$

由于P是正定阵,所以$V(x)$是一正定函数.

$$\dot{V}(x)|_{(2.1)}=(Ax+\sum_{j=1}^{k}\varepsilon_j g_j(x))^\tau Px+x^\tau P(Ax+\sum_{j=1}^{k}\varepsilon_j g_j(x))$$

$$\overset{(3.1)}{=}-x^\tau Qx+\sum_{j=1}^{k}\varepsilon_j[g_j^\tau(x))Px+x^\tau Pg_j(x)]$$

$$\stackrel{(3.2)}{=} -x^{\tau}Qx+\sum_{j=1}^{k}\varepsilon_j[x^{\tau}R_j^{\tau}(x))Px+x^{\tau}PR_j(x)x]$$

$$\stackrel{(3.3)}{=} -\|Q^{\frac{1}{2}}x\|^2+x^{\tau}(Q^{\frac{1}{2}})^{\tau}\sum_{j=1}^{k}(\varepsilon_j(Q^{-\frac{1}{2}})^{\tau}H_j(x)Q^{-\frac{1}{2}}))Q^{\frac{1}{2}}x$$

$$\leqslant -(1-\delta_M(\sum_{j=1}^{k}\varepsilon_j(Q^{-\frac{1}{2}})^{\tau}H_j(x)Q^{-\frac{1}{2}}))\|Q^{\frac{1}{2}}x\|^2.$$

上述最后一不等式由引理 2.1 得．结合(3.4)及 Q 的正定性易知 $\dot{V}(x)|_{(2.1)}$是 Ω 上的负定函数．

所以 $x=0$ 是系统(2.1)在 Ω 上的渐近稳定平衡点．

定理 3.2 对系统(2.1)，$R_j(x)$，$H_j(x)$ 分别由(3.2)，(3.3)确定，函数阵 $H_j(x)<L_j(j=1,2,\cdots,k)$，其中 L_j 是正定常值阵．如果

$$\delta_M(\sum_{j=1}^{k}\varepsilon_j[(Q^{-\frac{1}{2}})^{\tau}L_jQ^{-\frac{1}{2}}])<1,$$

则 $x=0$ 是系统(2.1)在 Ω 上的渐近稳定平衡点．

上述定理 3.1 中条件(3.4)验证起来比较困难，定理 3.2 中 L_j 的求法也无普遍方法．若在(3.1)中取 $Q=I$，相应的 P 记为 P_I，即

$$A^{\tau}P_I+P_IA=-I. \tag{3.5}$$

则由上述定理可给出如下较易验证的结论．

推论 3.1 对系统(2.1)，设

$$H_j(x)=R_j^{\tau}(x)P_I+P_IR_j(x).$$

其中 $R_j(x)$，P_I 分别由(3.2)和(3.5)确定，如果

i) $\sup\limits_{x\in\Omega}\delta_M(H_j(x))\leqslant\mu_j$, $(j=1,2,\cdots,k)$.

ii) $\sum\limits_{j=1}^{k}|\varepsilon_j|\mu_j<1$. 则系统(2.1)的平衡状态 $x=0$ 在 Ω 上渐近稳定．

推论 3.2 对于线性系统

$$\dot{x}=(A+\sum_{j=1}^{k}\varepsilon_jB_j)x. \tag{3.6}$$

如果

$$\delta_M(\sum_{j=1}^{k}\varepsilon_j(B_j^{\tau}P_I+P_IB_j)))<1. \tag{3.7}$$

其中 P_I 由(3.5)确定，则 $x=0$ 是系统(3.6)在 Ω 上的渐近稳定平衡点。

注 3.2 定理 3.1 及定理 3.2 中的正定阵 Q 称为可调矩阵．只要适当地选择 Q，即可增大参数的鲁棒空间．另外推论 3.1 中，如果 $H_j(x)<L_j$，则条件 i) 可用 $\delta_M(L_j)\leqslant\mu_j(j=1,2,\cdots,k)$ 代替．推论 3.2 中式(3.7)可用更强的条件

$$\sum_{j=1}^{k}|\varepsilon_j|\delta_M(B_j^{\tau}P_I+P_IB_j)<1 \tag{3.8}$$

代替．利用(3.8)极易求出(3.6)的鲁棒界．

4 例 子

例 1 考虑二阶参数不确定非线性系统

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}x+\varepsilon_1\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{4}x_2\sin x_1\end{bmatrix}+\varepsilon_2\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}x_1\cos x_2\\ 0\end{bmatrix}. \tag{4.1}$$

(其中 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 是不确定参数)在其平衡点 $x=0$ 的全局鲁棒稳定性问题．

记

$$A=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix},\quad g_1(x)=\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{4}x_2\sin x_1\end{bmatrix},\quad g_2(x)=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}x_1\cos x_2\\ 0\end{bmatrix},$$

解 Lyapunov 方程 $A^{\tau}P+PA=-I$ 得 $P=I$. 显然有

$$R_1(x)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \frac{1}{4}\sin x_1\end{bmatrix},\quad R_2(x)=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\cos x_2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$H_1(x)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\sin x_1\end{bmatrix},\quad H_2(x)=\begin{bmatrix}-\cos x_2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

故对任意 $x\in R^n$,有

$$\delta_M(H_1(x))\leqslant\frac{1}{2},\quad \delta_M(H_2(x))\leqslant 1,$$

由推论 3.1 知,当 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 满足

$$\frac{1}{2}|\varepsilon_1|+|\varepsilon_2|<1$$

时,系统(4.1)的平衡点 $x=0$ 是其在 R^n 上的渐近稳定平衡点．故系统(4.1)的参数鲁棒空间为

$$\left\{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\,\middle|\,\frac{1}{2}|\varepsilon_1|+|\varepsilon_2|<1\right\}.$$

如图 1 阴影部分所示．

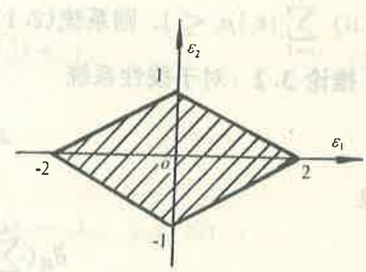

图 1 系统(4.1)的鲁棒空间

注 4.1 若用定理 1 的结论,取 $Q=I$,则可得到系统(4.1)的如下较大的参数鲁棒空间

$$\left\{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\,\middle|\,\max\left\{|\varepsilon_2|,\left|\frac{1}{2}\varepsilon_1\right|\right\}<1\right\}.$$

例 2 考虑系统[1,3]

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-3 & -2\\ 1 & 0\end{bmatrix}x+\varepsilon_1\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}x+\varepsilon_2\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}x. \tag{4.2}$$

(其中 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 为不确定参数)在 $x=0$ 的鲁棒稳定性．直接计算,由推论 3.2 即得(4.2)的参数鲁棒空间为

$$
\mathscr{A}=\left\{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\left|\begin{array}{l}\varepsilon_1+\varepsilon_2\geqslant 0\\ \varepsilon_1+\varepsilon_2+\sqrt{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2+(\varepsilon_1+5\varepsilon_2)^2}<4\end{array}\right.\right\}
\cup\left\{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\left|\begin{array}{l}\varepsilon_1+\varepsilon_2<0\\ -\varepsilon_1-\varepsilon_2+\sqrt{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2+(\varepsilon_1+5\varepsilon_2)^2}<4\end{array}\right.\right\},
$$

将所得参数鲁棒空间 $\mathscr{A}$ 与[1]和[3]给出的参数鲁棒空间比较，可以看出它们之间无相互包含关系，所以本文的结论具有一定的价值和意义．

参 考 文 献

[1] Chou, J. H.. Stability Robustness of Linear State-Space Models with Structured Perturbations. Syst & Contr Lett, 1990, 15(3): 207－201

[2] A. L. Zelent & ovsky. Nonquadratic Lyapunov Functions for Robust Stability of Linear Uncertain Systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1994, AC-39(1): 91－93

[3] 胡庭姝，施颂椒．状态矩阵中含不确定参数的系统的鲁棒性分析．控制理论与应用，1992，9(5)：533－537

[4] Baue. P. H. Premaratrem, K. and Duran J.. A Necessary and Sufficient Condition for Robust Asymptotic Stability of Time-Variant Discrete Systems. IEEE Trans Automat. Contr., 1993, AC-38(9): 1427－1430

[5] 杨峻松，严星刚，郭雷．一类时变线性系统的时域鲁棒稳定性．青岛大学学报，1994，7(1)：55－59

[6] 黄琳．系统与控制理论中的线性代数．北京：科学出版社，1984

Robust Stability for a Class of Nonlinear Systems with Uncertain Parameters

YAN Xinggang, JING Yuanwei and ZHANG Siying
(Department of Automatic Control, Northeastern University · Shenyang, 110006, PRC)

Abstract: In this paper, a class of nonlinear system with uncertain parameters was studied. Then, some robust stability criteria were presented and a method of finding the parametric robust space was given for the system. Finally, an example was introduced to illustrate the result of this paper.

Key words: nonlinear uncertain systems; robust stability; singular value

本文作者简介

严星刚　1964 年生．1985 年在陕西师范大学数学系获理学学士学位，1991 年在曲阜师范大学运筹与控制专业获理学硕士学位．1992 年晋升为讲师．现在东北大学自动控制系攻读博士学位．主要从事非线性系统的几何理论、相似组合非线性系统的结构研究及鲁棒控制的研究．

井元伟　1956 年生．1981 年毕业于辽宁大学数学系获理学学士学位，分别于 1984 年和 1988 年在东北大学自动控制系获工学硕士学位和工学博士学位．现为东北大学自动控制系副教授，控制理论教研室副主任，实验室主任．辽宁省系统工程学会理事．主要研究方向为复杂系统控制结构及协调控制与全息控制．

张嗣瀛　见本刊 1996 年第 1 期第 69 页．