第 13 卷第 3 期
1996 年 6 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 13, No. 3
Jun., 1996

单输入最优控制系统中 Q 矩阵的解析解

王耀青

(华中理工大学动力系·武汉,430074)

摘要:本文通过系统的开环极点和闭环极点,给出了单输入最优控制系统中 Q 矩阵的一种解析表达式.根据这一结果,我们不仅可以求得 LQ 最优控制指标函数中的 Q 矩阵,而且还可以将它作为判别 LQ 逆问题解存在的充分条件.

关键词:LQ 逆问题;最优控制;加权矩阵;特征值

1 绪　　言

如何确定单输入系统 LQ 最优控制问题

$$\begin{cases} J = \int_0^{\infty} [x^{\mathrm{T}}(t)Qx(t) + u^{\mathrm{T}}(t)Ru(t)]\mathrm{d}t, \\ \text{s.t.}\ \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \end{cases} \tag{1a,b}$$

中的加权矩阵 Q 和 R 使得闭环控制系统

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t), \quad K = R^{-1}B^{\mathrm{T}}P \tag{2}$$

的特征值为期望值 $\lambda_{ci}, i=1,2,\cdots,n$,是研究 LQ 最优控制逆问题的基本内容.式中的矩阵均为适当维数,且满足有关条件[1].此外,矩阵 P 是方程

$$A^{\mathrm{T}}P + PA - PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P + Q = 0 \tag{3}$$

的唯一对称正定解.

对 LQ 最优控制之逆问题进行研究的历史起源于文献[2].近几年来,文献[3~7]在研究该问题的解析解法方面做了大量的研究工作.本文将在单输入系统下给出该问题的一种更为简便的解析表达式.它在判别 LQ 逆问题解的存在性方面具有更好的先验性.

2 主要结论

为了保证 LQ 逆问题解存在,定义系统(1b)的最优闭环极点的集合为 $C_{\mathrm{opt}}^{-} := \{\lambda \in \mathrm{C} \mid \lambda \in \lambda(A - BK), K = R^{-1}B^{\mathrm{T}}P, A^{\mathrm{T}}P + PA - PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P + Q = 0, Q \geqslant 0, R > 0\}$,其中 $\lambda(\cdot)$ 表示矩阵·的全部特征值的集合.本文假定 $\lambda_{ci} \in C_{\mathrm{opt}}^{-}$,即假定 LQ 逆问题解存在.

此外,为了表达方便起见,引入如下数学符号的定义:

$$\alpha_i = \alpha(\lambda_{ci})\alpha(-\lambda_{ci}), \quad C = (B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B),$$

$$\Psi_i = CH\Lambda_i^{+}(\Lambda_i^{-})^{\mathrm{T}}HC^{\mathrm{T}} = \Psi_i^{+}(\Psi_i^{-})^{\mathrm{T}}, \quad \Lambda_i^{\pm} = [1 \quad \pm\lambda_{ci} \quad \cdots \quad (\pm\lambda)_{ci}^{n-1}]^{\mathrm{T}}.$$

其中 H 是第一行为$[a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n]$的左上三角 Toeplitz 矩阵,$a_i, i=1,2a,\cdots,n$,为系统(1b)的开环特征多项式 $\alpha(\lambda)$ 的系数.

$$\alpha(\lambda) = \det(\lambda I - A) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0, \quad a_n = 1. \tag{4}$$

定理 1[5,6]　考虑由(1)~(3)式所描述的 LQ 最优控制问题的逆问题.对于该问题,满

本文于 1995 年 3 月 21 日收到.1995 年 10 月 4 日收到修改稿.

足特征值 $\lambda_{ci}, i=1,2,\cdots,n$，要求的加权矩阵 Q（在 $R=1$ 的条件下）可以参数化表示为：

$$Q = -(\alpha_1\xi_1 \quad \alpha_2\xi_2 \quad \cdots \quad \alpha_n\xi_n)(\Psi_1\xi_1 \quad \Psi_2\xi_2 \quad \cdots \quad \Psi_n\xi_n)^{-1} \tag{5}$$

的充分必要条件为：

a）方程(3)的特征值为 $\lambda_{ci}, \lambda_{ci} \in C^-_{\text{opt}}, i=1,2,\cdots,n$，且 λ_{ci} 的几何重根个数等于它的代数重根个数；

b）当 $\lambda_{ci} \in \lambda(A)$ 或 $\lambda_{ci} \in \lambda(-A)$ 时，矩阵 A 的特征值集合 $\{\lambda_{ci}\}_{i=1}^n$ 中的某个 $\lambda_{oi}, \lambda_{oi} = \lambda_{ci}$ 或 $\lambda_{oi} = -\lambda_{ci}, i \in [1,n]$ 的几何重根个数为1.

其中 $\xi_i (i=1,2,\cdots,n)$ 的选取使得 $Q = Q^{\mathrm{T}} \geqslant 0$，以及 $\Psi_i\xi_i, i=1,2,\cdots,n$，在复数空间 C^n 上线性独立；且当 $\lambda_{ci} = \lambda_{ci}^*$ 时，$\xi_i = \xi_i^*$，$*$ 表示复数共轭.

定理2 对于给定的 $\lambda_{ci}, i=1,2,\cdots,n$，若方程

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = \operatorname{diag}[-1 \quad 1 \quad \cdots \quad (-1)^n] \begin{bmatrix} 1 & \lambda_{c1}^2 & \cdots & \lambda_{c1}^{2(n-1)} \\ 1 & \lambda_{c2}^2 & \cdots & \lambda_{c2}^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_{cn}^2 & \cdots & \lambda_{cn}^{2(n-1)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

使得 $q_i \geqslant 0, i=1,2,\cdots,n$，则 q_i 是实数，且满足 λ_{ci} 要求的矩阵 $Q(R=1)$ 为：

$$Q = (CH)^{-\mathrm{T}}\operatorname{diag}[q_1 \quad q_2 \cdots \quad q_n](CH)^{-1}. \tag{7}$$

证　当 λ_{ci} 是实数时，定义 $\xi_i = [\xi_{i1} \quad \xi_{i2} \quad \cdots \quad \xi_{in}]^{\mathrm{T}}$. 由(5)式得

$$Q\Psi_i^+\kappa_i = -\alpha_i\xi_i, \quad \kappa_i = (\Psi_i^-)^{\mathrm{T}}\xi_i. \tag{8a,b}$$

由方程(8b)得

$$\begin{bmatrix} (\Psi_i^-)^{\mathrm{T}} \\ 0 \quad\quad I \end{bmatrix}\xi_i = [\kappa_i \quad \xi_{i2} \quad \cdots \quad \xi_{in}]^{\mathrm{T}},$$

$$\xi_i = \begin{bmatrix} (\Psi_i^-)^{\mathrm{T}} \\ 0 \quad\quad I \end{bmatrix}^{-1}[\kappa_i \quad \xi_{i2} \quad \cdots \quad \xi_{in}]^{\mathrm{T}}. \tag{9}$$

将方程(9)代入方程(8a)，并经整理得

$$\begin{bmatrix} (\Psi_i^-)^{\mathrm{T}} \\ 0 \quad I \end{bmatrix}Q\Psi_i^+\kappa_i = -\alpha_i[\kappa_i \quad \xi_{i2} \quad \cdots \quad \xi_{in}]^{\mathrm{T}}. \tag{10}$$

由此可以得到以下两个方程

$$(\Psi_i^-)^{\mathrm{T}}Q\Psi_i^+ = -\alpha_i, \quad [0 \quad I]Q\Psi_i^+\kappa_i = -\alpha_i[\xi_{i2} \quad \xi_{i3} \quad \cdots \quad \xi_{in}]^{\mathrm{T}}. \tag{11a,b}$$

将方程(7)代入方程(11a)得

$$(\Lambda_i^-)^{\mathrm{T}}\operatorname{diag}[q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_n][\Lambda_i^+] = -\alpha_i, \quad i = 1,2,\cdots,n. \tag{12}$$

(12)式进而可以表示为

$$[1 \quad \lambda_{c1}^2 \quad \cdots \quad \lambda_{c1}^{2(n-1)}][q_1 \quad -q_2 \quad \cdots \quad (-1)^{n-1}q_n]^{\mathrm{T}} = -\alpha_i, \quad i = 1,2,\cdots,n. \tag{13}$$

显然，方程(13)的解就是方程(6)，且 q_i 是实数．因此，当 $q_i \geqslant 0$ 时，方程(7)即为加权矩阵．

当 λ_{ci} 是复数时，设 $\lambda_{ci} = \lambda_{ci+1}^* = \bar{\lambda}_{ci} + \lambda_{ci+1}, \lambda_{cj} = \bar{\lambda}_{cj}^*, j \neq i, i+1$. 定义 U 和 Λ：

$U = \operatorname{diag}[-1 \quad 1 \quad \cdots \quad (-1)^n]$，　Λ = 第 i 行为 $[1 \quad \bar{\lambda}_{ci}^2 \quad \cdots \quad \bar{\lambda}_{ci}^{2(n-1)}]$ 的 $n \times n$ 维矩阵

以及变换矩阵 T

$$T = \text{block diag}\left\{1,1,\cdots,\begin{bmatrix}1 & 1\\ -j & j\end{bmatrix},1,\cdots,1\right\}.$$

对(6)式的右边进行变换得

$$U\Lambda^{-1}[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_n]^{\mathrm{T}} = U(T\Lambda)^{-1}T[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_n]^{\mathrm{T}} \in \mathrm{R}^{n\times n}.$$

所以当(6)式成立时有 $Q \in \mathrm{R}^{n\times n}$,(7)式亦为本文的解. 证毕.

3 设计举例

例1 考虑一线性单输入二阶线性可控系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}x + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u.$$

设 $\lambda_{c1} = \lambda_{c2}^* = -2 + 1j$,求满足 λ_{c1} 和 λ_{c2} 要求的加权矩阵 $Q(R = 1)$.

解 在本例中,$\alpha(\lambda) = \lambda^2 + \lambda, CH = I, \alpha_1 = \alpha_2^* = -10 - 20j, \Psi_1^+ = (\Psi_2^+)^* = [1 \quad -2 + 1j], [1 \quad \lambda_{c1}^2] = [1 \quad \lambda_{c2}^2]^* = [1 \quad 3 - 4j]$. 根据(6)式或(14)式可以求得:

$$\begin{bmatrix}q_1\\ q_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \lambda_{c1}^2\\ 1 & \lambda_{c2}^2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3-4j\\ 1 & 3+4j\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-10-20j\\ -10+20j\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 6\\ 0 & -8\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-20\\ -40\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}25\\ 5\end{bmatrix}.$$

因此,满足 λ_1, λ_{c2} 要求的矩阵 $Q = \mathrm{diag}[25 \quad 5]$. 解方程(3)可以验证结果的正确性.

例2 考虑一线性单输入三阶线性可控系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}x + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u.$$

已知 $\lambda_{c1} = \lambda_{c2}^* = -2 + 1j, \lambda_{c3} = -2$. 求满足 $\lambda_{ci}, i = 1,2,3$,要求的加权矩阵 $Q(R = 1)$.

解 在本例中,

$$CH = I, \quad \alpha(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2, \quad \alpha(\lambda_{c1}) = \alpha(\lambda_{c2})^* = 1 + 7j,$$

$$\alpha(-\lambda_{ci}) = \alpha(-\lambda_{c2})^* = 5 - 15j, \quad \alpha_1 = \alpha_2^* = 110 + 20j, \quad \alpha^3 = -48,$$

$$[1 \quad \lambda_{c1}^2 \quad \lambda_{c1}^4] = [1 \quad \lambda_{c2}^2 \quad \lambda_{c2}^4]^* = [1 \quad 3 - 4k \quad -7 - 24j],$$

$$[1 \quad \lambda_{c3}^2 \quad \lambda_{c3}^4] = [1 \quad 4 \quad 16].$$

根据(6)式或(14)式可以求得:

$$\begin{bmatrix}q_1\\ q_2\\ q_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3-4j & -7-24j\\ 1 & 3+4j & -7+24j\\ 1 & 4 & 16\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}110+20j\\ 110-20j\\ -48\end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{272}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}64 & -152 & -400\\ -48 & 46 & 96\\ 8 & -2 & -16\end{bmatrix}\begin{bmatrix}220\\ 40\\ -48\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}100\\ 49\\ 9\end{bmatrix}.$$

因此,满足 $\lambda_{c1}, \lambda_{c2}$ 和 λ_{c3} 要求的加权矩阵 $Q = \mathrm{diag}[100 \quad 49 \quad 9]$. 解方程(3)可以验证结果的正确性.

参 考 文 献

[1] Sage, S. S. L.. Optimum System Control. Englewood Cliffs, N. J. Prentice Hall, 1968

[2] Kalman, R. E.. When is a Linear Control System Optimal? J. Basic Eng. Trans. 1964, ASME-86D: 51—56

[3] 王耀青，吕勇哉．LQ 最优控制之逆问题的研究．控制理论与应用，1989，6(4)：9—18

[4] 王耀青，吕勇哉．关于确定加权加矩阵 Q 的两个定理．信息与控制．1989，18(6)：5—9

[5] 王耀青．LQ 逆问题的解(英文)．中国科学院研究生院学报，1990，7(1)：18—25

[6] 王耀青．LQ 逆问题的一种有效算法．控制理论与应用，1992，9(1)：9—15

[7] 王耀青．LQ 最优控制系统中加权矩阵的确定．自动化学报，1992，(2)：213—217

An Analytical Solution to the LQ Inverse Problem for SISO System

WANG Yaoqing

(Department of Power Engineering, Huazhong University of Science and Technology · Wuhan, 430074, PRC)

Abstract: This paper presents an analytical solution to the LQ inverse problem for systems with single input control variable in terms of the eigenvalues of both open-loop system and closed loop system. By utilizing this result, the weighting matrices Q and R can be easily obtained, and the sufficient condition for the exsitence of LQ inverse problem is immediate as well.

Key words: LQ inverse problem; optimal control; weighting matrices; eigenvalues

本文作者简介

王耀青　1961 年生．华中理工大学动力系．主要研究兴趣：最优控制，鲁棒控制器分析与设计，电厂计算机控制与仿真．