第 13 卷第 6 期
1996 年 12 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 13, No. 6
Dec., 1996

非线性奇异控制系统的解耦线性化*

严星刚
(东北大学自控系·沈阳,110006)

杨峻松
(青岛大学应用数学系·青岛,266071)

张嗣瀛
(东北大学自控系·沈阳,110006)

摘要：本文研究了一般非线性奇异控制系统,给出了奇异控制系统可解耦线性化的充要条件,并举例说明了本文的结论.

关键词：奇异控制系统；解耦线性化；光滑向量场；李括号

1 引 言

非线性系统的线性化是工程技术中处理非线性模型的一种常用方法,系统解耦也是工程上十分感兴趣的问题之一. 如果非线性系统在线性化的同时,使系统也具有解耦特性,这将对系统的分析与设计带来许多方便. 这一问题就是非线性系统的解耦线性化问题.

关于一般非线性系统的解耦线性化问题已基本解决[1,2],近年来,由于实际问题的需要,对于非线性奇异控制系统的研究引起了人们极大的兴趣,关于非线性奇异控制系统的线性化问题已取得了一些初步成果[3,4],而对于解耦线性化问题至今无人问津,本文将对奇异控制系统的解耦线性化问题做一些初步探讨.

2 基本概念及分析

考虑如下的奇异控制系统

$$E(x)\dot{x} = f(x,u). \tag{2.1}$$

其中 $x \in M$(M 为 n 维状态微分流形),$f(x,u) \in V^{\omega}(M)$,($V^{\omega}(M)$ 是 M 上的光滑向量场集合)$u = (u_1,\cdots,u_m)^{\tau} \in \mathbb{R}^m$ 是容许控制,$E(x)$ 是由 M 上的光滑向量场构成的常秩奇异阵.

对于一般非线性系统,在一定条件下,存在一微分同胚使之转化为仿射非线性系统[5],若将此结论用于系统(2.1)即知,系统(2.1)的研究可转化为对如下系统的研究

$$E(z)\dot{z} = \bar{f}(z) + \sum_{i=1}^{m} \bar{g}_i(z)u_i$$

不失一般性,本文只考虑如下的非线性奇异控制系统

$$E(x)\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{m} g_i(x)u_i. \tag{2.2}$$

其中 $x \in M$,$f(x)$,$g_i(x) \in V^{\omega}(M)$,$u = (u_1,u_2,\cdots,u_m)^{\tau} \in \mathbb{R}^m$,$E(x)$ 是由状态微分流形 M 上的 n 个光滑向量场构成的常秩奇异函数阵.

定义 1 设 $x_0 \in M$,如果存在 x_0 点的局部坐标邻域(U,ψ),使系统(2.2)在 $\psi(U)$ 所给出的局部坐标 $Z = (z^1,z^2,\cdots,z^n)$ 下具有如下结构

$$Q\dot{Z} = AZ + Bu + C, \tag{2.3}$$

* 国家自然科学基金. 博士点基金资助项目.

本文于 1994 年 11 月 24 日收到. 1995 年 10 月 27 日收到修改稿.

其中 $Q=\mathrm{diag}\{Q_1,Q_2,\cdots,Q_m\}$，$B=\mathrm{diag}\{B_1,B_2,\cdots,B_m\}$，$A=\mathrm{diag}\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$ 为常秩准对角阵，且 B 满秩，Q 奇异，$C=(C_1,C_2,\cdots,C_m)^\tau$ 为 m 维常值向量，z^i，C^i 皆为 S_i 维向量，Q_i，A_i 为 $S_i\times S_i$ 阵，B_i 为 $S_i\times l$ 阵，$\sum_{i=1}^{m}S_i=n$，$(S_i>0,i=1,2,\cdots,m)$ 则称奇异系统(2.2) 在 x_0 点可局部解耦线性化，并称(2.3) 是(2.2) 在 x_0 点的解耦线性化系统.

注 对应于系统(2.3)，(2.2)的更一般的解耦线性化系统为

$$\mathrm{diag}\{Q_1,Q_2,\cdots,Q_r\}z=\mathrm{diag}\{A_1,A_2,\cdots,A_r\}z+\mathrm{diag}\{B_1,B_2,\cdots,B_r\}u+\begin{bmatrix}C_1\\C_2\\\vdots\\C_t\end{bmatrix}. \tag{2.4}$$

其中 $t\leqslant m$，当 $t=m$ 时即为(2.3). 为行文方面，本文只讨论能解耦线性化为(2.3) 的系统，至于(2.4) 的情形，下面的讨论完全可类似得出.

3 主要结果

引理 1[2] 设 X,Y 是两个光滑向量场，且$[X,Y]=0$，则$(\Phi_t^X)_*Y(\Phi_{-t}^X(x))=Y(x)$.

引理 2[6] 设光滑向量场 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 在 $x_0\in M$ 点线性无关，则映射 $T(z_1,\cdots,z_n)=\Phi_{z_1}^{X_1}\cdot\Phi_{z_2}^{X_2}\cdot\cdots\cdot\Phi_{z_n}^{X_n}(x_0)$ 是 $0\in\mathrm{R}^n$ 某邻域到 x_0 某邻域的微分同胚.

引理 3[2] 若奇异系统(2.2)在 $x_0\in M$ 点可解耦线性化，则必存在 x_0 某邻域的微分同胚 $T:x\to z$ 使在 Z 坐标下，系统(2.2) 具有如下的结构：

$$Qz=\begin{bmatrix}A_1&&&\\&A_2&&\\&&\ddots&\\&&&A_m\end{bmatrix}z+\begin{bmatrix}B_1&&&\\&B_2&&\\&&\ddots&\\&&&B_m\end{bmatrix}u+\begin{bmatrix}C_1\\C_2\\\vdots\\C_m\end{bmatrix}, \tag{3.1}$$

其中 $Q=\mathrm{diag}\{Q_1,\cdots Q_m\}$ 为常值奇异阵，C_i 是S_i 维常向量，B_i 是$S_i\times l$ 矩阵$(i=1,2,\cdots,m)$. 且 $T(x_0)=0$.

注 将[2]的结论应用于奇异系统(2.2)，立即可得引理 3.

定理 1 设 $x_0\in M$，则非线性奇异控制系统(2.2) 在 x_0 点可解耦线性化的充要条件是存在 x_0 某邻域U 及其上的 $n-m$ 个光滑向量场，使其与 $g_i(x)$ 构成 n 个光滑向量场 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 满足如下条件.

i) $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 在 x_0 点线性无关，且在 U 上$[X_i,X_j]=0\quad(i,j=1,2,\cdots,n)$；

ii) 令 $T(z_1,z_2,\cdots,z_n)=\Phi_{z_1}^{X_1}\cdot\Phi_{z_2}^{X_2}\cdot\cdots\Phi_{z_n}^{X_n}(x_0)$，则 $T_*^{-1}(f)=\mathrm{diag}\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}z+C$ (C 为 n 维常向量)；

iii) 记 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，则 $X^{-1}E(x)X=\mathrm{diag}\{Q_1,\cdots,Q_m\}$ 为常值奇异阵，且 Q_i 与 A_i 同阶.

证 (充分性)

由引理 2 知，ii)中的 T 是 $0\in\mathrm{R}^n$ 某邻域到 x_0 某邻域的微分同胚，且由引理 2 的证明知

$$\left.\frac{\partial T}{\partial z_i}\right|_x=(\Phi^{1,i-1}_{z_1,\cdots,z_{i-1}})_*X_i(\Phi^{1,i-1}_{-z_1,\cdots,-z_{i-1}}(x)),$$

其中 $\Phi^{1,i-1}_{z_1,\cdots,z_{i-1}} = \Phi^{X_1}_{z_1}\cdot\Phi^{X_2}_{z_2}\cdot\cdots\Phi^{X_{i-1}}_{z_{i-1}}$.

由 i)中 X_i, X_j 可交换及引理 1 有

$$\left.\frac{\partial T}{\partial z_i}\right|_x = X_i(x),$$

故

$$J_T = \left(\frac{\partial T}{\partial z_1}, \frac{\partial T}{\partial z_2}, \cdots, \frac{\partial T}{\partial z_n}\right) = (X_1, X_2, \cdots, X_n). \tag{3.2}$$

所以

$$(T_*^{-1}(X_1), T_*^{-1}(X_2), \cdots, T_*^{-1}(X_n)) = J_T^{-1}(X_1, X_2, X_1, \cdots, X_n). \ T = I_n.$$

于是有

$$T_*^{-1}(g_i)\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} \leftarrow \text{第 } s_1+s_2+\cdots+s_{i-1}+1 \text{ 行} \quad (i=1,2,\cdots,m).$$

这只要把 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 按如下顺序排列即可

$$g_1, X^1_2, \cdots, X^1_{s_1}, g_2, X^2_2, \cdots, X^2_{s_2}, g_m, X^m_2, \cdots, X^m_{s_m}. \tag{3.3}$$

令 $B_i = (1\quad 0\quad \cdots\quad 0)^\tau, (i=1,2,\cdots,m)$，再结合 ii) 和 iii) 有

$$J_T^{-1}E(x)J_T\big|_{x=T(z)}\dot z = \operatorname{diag}\{A_1,\cdots,A_m\}z + C + \operatorname{diag}\{B_1,\cdots,B_m\}u.$$

由(3.2)有

$$J_T^{-1}E(x)J_T = X^{-1}E(x)X = \operatorname{diag}\{Q_1,\cdots,Q_m\}.$$

故在 z 坐标下，系统(2.2)具有如下结构

$$\operatorname{diag}\{Q_1,\cdots,Q_m\}\dot z = \operatorname{diag}\{A_1,\cdots,A_m\}z + \operatorname{diag}\{B_1,B_2,\cdots,B_m\}U + (C_1,\cdots,C_m)^\tau.$$

此即(2.2)在 x_0 点可解耦线性化.

(必要性)若系统(2.2)在 x_0 点可解耦线性化，则由引理 3 知，存在微分同胚 $D: x\to z$，使(2.2)在 z 坐标下具有(3.1)的结构，且 $D(x_0)=0$. 所以

$$D_*(f) = \begin{pmatrix}C_1\\ C_2\\ \vdots\\ C_m\end{pmatrix} + \operatorname{diag}\{A_1, A_2, \cdots, A_m\}z,$$

$$D_*(g) = \operatorname{diag}\{0,\cdots,0,\underset{\substack{\downarrow\\ \text{第 } i \text{ 个子块}}}{B_i},0,\cdots,0\}, (i=1,2,\cdots,m),$$

其中 $B_i = (1,0,\cdots,0)^\tau$ 是 S_i 维向量，$g=(g_1,g_2,\cdots,g_m)$.

现在，我们构造 U 上 $n-m$ 个光滑向量场

$$X_2^1 = J_D^{-1}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}\cdot D^{-1},\quad X_3^1 = J_D^{-1}\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}\cdot D^{-1},\cdots,\quad X_{s_1}^1 = J_D^{-1}\begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}\cdot D^{-1},$$

$$\cdots\cdots$$

$$X_2^m = J_D^{-1}\begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}\cdot D^{-1},\quad X_3^m = J_D^{-1}\begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\\0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix}\cdot D^{-1},\cdots,\quad X_{s_m}^m = J_D^{-1}\begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}\cdot D^{-1}.$$

下证这 $n-m$ 个向量场满足要求.

将上述 $n-m$ 个向量场与 $g_1(x),\cdots,g_m(x)$ 构成的 n 个向量场排列成(3.3)的形式,并依次记其为 $X_1,X_2,\cdots,X_n$. 则

$$(D_*(X_1)\quad D_*(X_2)\cdots D_*(X_n)) = I_n. \tag{3.4}$$

所以 $(D_*(X_1),D_*(X_2),\cdots,D_*(X_n))$ 线性无关,且两两可交换. 再由微分同胚的性质即知,$X_1,X_1,\cdots,X_n$ 在 x_0 点线性无关,且 $[X_i,X_j]=0(i,j=1,2,\cdots,n)$ 即 i) 成立.

又
$$T(Z) = \Phi_{z_1}^{X_1}\cdot\Phi_{z_2}^{X_2}\cdot\cdots\cdot\Phi_{z_n}^{X_n}(x_0).$$

故由 i)及充分性的论证知 z 是 $x_0\in M$ 某邻域的局部坐标,且 $(T_*^{-1}(X_1),\cdots,T_*^{-1}(X_n)) = I_n$. 由(3.4)有 $J_D = J_T^{-1}$,再结合 $D(x_0) = T^{-1}(x_0) = 0$ 即有 $T^{-1} = D$. 所以

$$T_*^{-1}(f) = D_*(f) = (C_1^\tau, C_2^\tau,\cdots,C_m^\tau)^\tau + \mathrm{diag}(A_1,\cdots,A_m)Z.$$

故 ii)成立. 至于 iii),由 $J_T = (X_1,\cdots,X_n)$ 易知其成立. 故必要性得证.

综上所述即知定理1结论成立.

注 1 如果 x_0 是系统(2.2)的平衡点,则其解耦线性化系统(2.3)中 $C=0$.

注 2 从向量场集合 $\{ad_f^k g_i(x)\mid 1\leqslant i\leqslant m, 0\leqslant k\leqslant n-1\}$ 中寻找满足定理条件的 $n-m$ 个向量场不失为一种有效途径. 另外,定理1的证明实质上给出了解耦线性化系统的一种求法.

4 例 子

考虑非线性奇异控制系统

$$\begin{bmatrix}-2 & 2\cos x_2 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1+\sin x_2\\ 2\mathrm{tg}x_2\\ 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\ 1/\cos x_2\\ 0\end{bmatrix}u_1 + \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}u_2. \tag{4.1}$$

在原点的解耦线性化问题.

记
$$E(x) = \begin{bmatrix}-2 & 2\cos x_2 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix},\quad f(x) = \begin{bmatrix}x_1+\sin x_2\\ 2\mathrm{tg}x_2\\ 0\end{bmatrix},$$

$$g_1(x) = \begin{bmatrix}1\\ 1/\cos x_2\\ 0\end{bmatrix},\quad g_2(x) = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\quad x_0 = (0,0,0).$$

构造向量场 $g_3(x) = (0,0,1)^\tau$,并令

$$T(z_1,z_2,z_3)=\Phi_{z_1}^{g_1(x)}\cdot\Phi_{z_2}^{g_2(x)}\cdot\Phi_{z_3}^{g_3(x)}(x_0),$$

直接计算有

$$T:\begin{cases}x_1=z_1+z_2,\\ x_2=\arcsin z,\\ x_3=z_3,\end{cases}$$

$$X^{-1}E(x)X=\mathrm{diag}\left\{0,\begin{pmatrix}-2&0\\0&-1\end{pmatrix}\right\}.$$

故定理 1 条件满足，所以系统(4.1)在其平衡点 $x_0=(0,0,0)$ 的解耦线性化系统为

$$\mathrm{diag}\left\{0,\begin{pmatrix}-2&0\\0&-1\end{pmatrix}\right\}\dot{z}=\mathrm{diag}\left\{2,\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}z+\mathrm{diag}\left\{1,\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}u.$$

参 考 文 献

[1] Tarn, T. J., Cheng Daizhan. and Isidori, A.. External Linearization and Simultaneous Output Block Decoupling of Nonlinear Systems. Algbra and Geometric Methods in Nonlinear Control Theory. Reilel: Dordrecht, 1986
[2] 严星刚. 仿射非线性系统的无反馈解耦线性化. 94 中国控制与决策年会论文集，沈阳：东北大学出版社，1994，72—77
[3] 刘晓平，张嗣瀛. 非线性奇异系统的线性化. 信息与控制，1993，22(4)：209—214
[4] 刘晓平，张嗣瀛. 单输入非线性奇异系统的线性化. 控制与决策，1992，7(5)：372—376
[5] Su, R.. On The Linear Equivalents of Nonlinear System. Sys & Contr lett, 1982, 2(2)
[6] 程代展. 非线性系统的几何理论. 北京：科学出版社，1988

Linearization and Simultaneous Decoupling of Nonlinear Singular Control System

YAN Xinggang
(Department of Automatic Control, Northeastern University · Shenyang, 110006, PRC)
YANG Junsong
(Department of Mathematics, Qingdao University · Qingdao, 266071, PRC)
ZHANG Siying
(Department of Automatic Control, Northeastern University · Shenyang, 110006, PRC)

Abstract: In this paper, we analyzed a general nonlinear singular control system. Then, a sufficient and necessary condition of linearization and simultaneous decoupling for the system was presented. At last, an example was given to illustrate the result obtained in this paper.

Key words: singular control system; linearization and simultaneous decoupling; smooth vector field

本文作者简介

严星刚　见本刊 1996 年第 3 期第 399 页.

杨竣松　1943 年生. 1981 年毕业于西北工业大应用数学系，获理学硕士学位，现为青岛大学数学系副教授，主要从事最优控制及非线性控制系统理论研究.

张嗣瀛　见本刊 1996 年第 1 期第 69 页.