

具有饱和输入的预测控制的稳定性分析*

刘 兵 徐立鸿 冯纯伯

(东南大学自动化研究所·南京, 210096)

摘要: 本文对具有干扰、扇形性饱和输入及非线性未建模动态的预测控制进行综合设计. 首先给出鲁棒稳定的充分条件, 根据鲁棒稳定条件给出控制器综合的鲁棒性能准则, 并使问题转化为 Nevanlinna-Pick 问题, 进而求解鲁棒预测控制器. 最后给出仿真结果及问题讨论.

关键词: 鲁棒预测控制; 饱和输入; H_∞ 优化; 鲁棒性能

1 引 言

预测控制以其良好的特性和成功的应用而被广泛地接受, 但由于其算法严重的非线性使得稳定性和鲁棒性难于分析^[1,2]. 文[2]利用 Youla 因子化方法使问题转化, 给出稳定广义预测控制 (SGPC) 算法, 并证明闭环系统稳定. 但文[2]没有量化的综合结果, 同时没有考虑干扰等影响.

在实际系统中控制量时常受执行机构饱和性的约束, 为处理此问题, 人们提出一些补偿措施, 其中对参考量的再设计成为行之有效的技术^[3,4].

本文基于文[2]的思想对鲁棒预测控制进行尝试性的探讨. 对具有干扰、扇形性饱和输入和非线性未建模动态的预测控制系统进行综合设计, 给出鲁棒稳定的充分条件, 利用鲁棒控制的方法^[5]对控制器进行设计, 提高系统的鲁棒性能, 同时给出仿真研究及问题讨论.

2 预测控制算法

为使书写简洁, 在讨论预测控制算法之前, 先给出符号说明. 行向量 $f = [f_0, f_1, \dots, f_{n-1}]$ 对应多项式 $f(z^{-1}) = f_0 + f_1 z^{-1} + \dots + f_{n-1} z^{-(n-1)}$ 的系数构成的向量, 记 $f(z^{-1}) = P\{f\}$. $f^\#(z^{-1}) = z^{-(n-1)} f(z)$ 为 $f(z^{-1})$ 的倒多项式. C_f 为 $[C_f]_{ij} = f_{i-j}$ 的下三角带状 $N \times N$ 矩阵, Γ_f 为 C_f 的前 N_ω 列构成的矩阵, M_f 为 C_f 的后 $(N - N_\omega)$ 列构成的矩阵, H_f 为 $[H_f]_{ij} = f_{i-1+j}$ 的 $N \times N$ 带状 Hankel 矩阵.

$$\bar{Y} = [y(k+1), y(k+2), \dots, y(k+N)]^T,$$

$$\bar{Y} = [y(k), y(k-1), \dots, y(k-N+1)]^T;$$

$$\bar{U} = [\Delta u(k), \Delta u(k+1), \dots, \Delta u(k+N-1)]^T,$$

$$\bar{U} = [\Delta u(k-1), \Delta u(k-2), \dots, \Delta u(k-N)]^T;$$

$$\bar{\omega} = [\omega(k+1), \omega(k+2), \dots, \omega(k+N_\omega)]^T,$$

$$\bar{r} = [r(k+1), r(k+2), \dots, r(k+N)]^T,$$

$$\bar{e} = [e(k+1), e(k+2), \dots, e(k+N)]^T,$$

$e_1 = [1, 0, \dots, 0]^T$ 为 N_ω 维向量. 在不会混淆的情况下, 记 $X \triangleq X(z^{-1})$.

在系统设计时, 有些非线性是必须考虑的^[3,4], 如执行机构的饱和性及非线性未建模动态 (图1), 其中 $u(k)$, S , $u_0(k)$, $y(k)$, P_0 , P_Δ 分别为控制器输出、饱和的执行机构、执行机构输出、

* 国家自然科学基金和河南省教委自然科学基金资助.

本文于1995年4月11日收到, 1996年12月6日收到修改稿.

系统输出、标称系统及未建模动态。

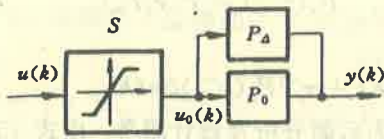


图 1 具有饱和输入及非线性未建模动态的系统

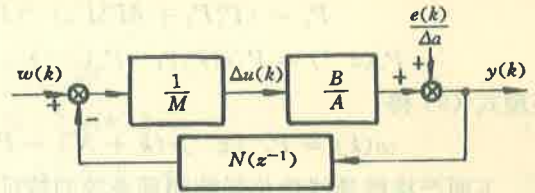


图 2 稳定的反馈系统

考虑到饱和的执行机构的物理意义及以后分析的方便,下面用扇形性饱和性代替文[3]中的分段函数描述非线性饱和的执行机构,即

$$\|Su(k) - \frac{1}{2}u(k)\| < \frac{1}{2}\|u(k)\|. \quad (1)$$

考虑具有白噪声的 ARIMA 模型描述的系统

$$a(z^{-1})y(k) = z^{-1}b(z^{-1})u_0(k) + e(k)/\Delta. \quad (2)$$

其中 $a(z^{-1}) = a_0 + a_1z^{-1} + \dots + a_{n-1}z^{-(n-1)}$, $b(z^{-1}) = b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_{n-2}z^{-(n-2)}$, $\Delta = 1 - z^{-1}$.

首先考虑执行机构 S 在中心 $1/2$ 处线性化(即 $u_0(k) = 1/2u(k)$)的标称系统. 令

$$A(z^{-1}) = 2a(z^{-1})\Delta, \quad B(z^{-1}) = z^{-1}b(z^{-1}),$$

下面利用 Youla 参数化方法构造稳定的反馈系统,令 Bezout 方程为

$$A(z^{-1})X(z^{-1}) + B(z^{-1})Y(z^{-1}) = 1, \quad (3)$$

设 $M(z^{-1}) = X(z^{-1}) - B(z^{-1})Q_1(z^{-1})$, $N(z^{-1}) = Y(z^{-1}) + A(z^{-1})Q_1(z^{-1})$, $Q_1(z^{-1})$ 为任一关于 z^{-1} 稳定的有理函数. 构造图 2 稳定的反馈系统,其中 $w(k)$ 为待设计的参考输入信号. 由图 2 有

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})\Delta u(k) + 2e(k), \quad M(z^{-1})\Delta u(k) = w(k) - N(z^{-1})y(k), \quad (4)$$

$$y(k) = B(z^{-1})w(k) + 2M(z^{-1})e(k), \quad \Delta u(k) = A(z^{-1})w(k) - 2N(z^{-1})e(k). \quad (5)$$

在预测控制中,通常对参考轨迹的“柔化”即是对参考量的动态再设计. 仿文[2]将图 2 中的待设计的参考输入向量 $[w(k+1), w(k+2), \dots, w(k+N)]^T$ 分为 $\vec{W}$ 和 $E_0\vec{R}$ 两部分, $\vec{R}$ 为系统输出 $\vec{Y}$ 期望的跟踪量, E_0 为“柔化” $N(z^{-1})y(k+i)$ ($i = N_w + 1, \dots, N$) 对 $w(k+i)$ ($i = N_w + 1, \dots, k+N$) 的跟踪而设定的 $(N - N_w) \times N$ 矩阵(如 E_0 取 C_N 的后 $N - N_w$ 行),类似于通常预测控制中的“柔化”因子. 下面对 $\vec{W}$ (图 2 中 $w(k)$) 动态再设计,起到一定的补偿作用. 由式(4),仿文[2]的证明有引理 1.

引理 1 对参考时域为 N_w , 预测时域为 N 的输出和控制向量分别为

$$\vec{Y} = \Gamma_b \vec{W} + M_b E_0 \vec{R} - P_1 \vec{Y} - P_2 \vec{U} + 2C_M \vec{e}, \quad (6)$$

$$\vec{U} = \Gamma_A \vec{W} + M_A E_0 \vec{R} - P_3 \vec{Y} - P_4 \vec{U} - 2C_z^{-1} N \vec{e}, \quad (7)$$

其中

$$P_1 = C_b H_{z^{-1}N} + C_M H_A, \quad P_2 = C_b H_M - C_M H_b,$$

$$P_3 = C_A H_{z^{-1}N} - C_z^{-1} N H_A, \quad P_4 = C_A H_M + C_z^{-1} N H_b.$$

和通常预测控制算法一样取指标函数

$$J = E\{\|\vec{Y} - \vec{R}\|^2 + \delta \|\vec{U}\|^2\}. \quad (8)$$

假定 $\vec{W}$, $\vec{Y}$, $\vec{U}$, 和 $\vec{e}$ 无关. 将式(6)和式(7)代入式(8),对 $\vec{W}$ 优化得

$$\vec{W} = P_r \vec{R} + P_y \vec{Y} + P_u \vec{U}, \quad (9)$$

其中

$$P_r = (\Gamma_b^T \Gamma_b + \delta \Gamma_A^T \Gamma_A)^{-1} (\Gamma_b^T - \Gamma_b^T M_b E_0 - \delta \Gamma_A^T M_A E_0),$$

$$P_y = (\Gamma_b^T \Gamma_b + \delta \Gamma_A^T \Gamma_A)^{-1} (\Gamma_b^T P_1 + \delta \Gamma_A^T P_3),$$

$$P_u = (\Gamma_b^T \Gamma_b + \delta \Gamma_A^T \Gamma_A)^{-1} (\Gamma_b^T P_2 + \delta \Gamma_A^T P_4).$$

$$\text{令 } P_r(z^{-1}) = P\{e_1^T P_r\}, \quad P_y(z^{-1}) = P\{e_1^T P_y\}, \quad P_u(z^{-1}) = P\{e_1^T P_u\}.$$

整理式 (9) 得

$$w(k) = P_r^*(z^{-1})r(k+N) + P_y(z^{-1})y(k) + z^{-1}P_u(z^{-1})\Delta u(k). \quad (10)$$

下面严格推导线性化标称闭环系统的特征多项式, 为后面分析及设计服务. 由式 (5) 得

$$\bar{Y} = \Gamma_b \bar{W} + M_b E_0 \bar{R} + H_b \bar{W} + 2C_M \bar{e} + 2H_M \bar{e}, \quad (11)$$

$$\bar{U} = \Gamma_A \bar{W} + M_A E_0 \bar{R} + H_A \bar{W} - 2C_{z^{-1}N} \bar{e} - 2H_{z^{-1}N} \bar{e}. \quad (12)$$

由式 (11)、式 (12)、式 (6)、式 (7) 得

$$2H_M \bar{e} + H_b \bar{W} = -P_1 \bar{Y} - P_2 \bar{U}, \quad -2H_{z^{-1}N} \bar{e} + H_A \bar{W} = -P_3 \bar{Y} - P_4 \bar{U}. \quad (13)$$

由式 (13) 代入 (9), 整理得

$$P_c(z^{-1})w(k) = P_r^*(z^{-1})r(k+N) - P_c(z^{-1})e(k). \quad (14)$$

其中

$$P_c(z^{-1}) = P\{e_1^T (\Gamma_b^T \Gamma_b + \delta \Gamma_A^T \Gamma_A)^{-1} (\Gamma_b^T H_b + \delta \Gamma_A^T H_{z^{-1}N})\}, \quad (15)$$

$$P_e(z^{-1}) = P\{2e_1^T (\Gamma_b^T \Gamma_b + \delta \Gamma_A^T \Gamma_A)^{-1} (\Gamma_b^T H_M - \delta \Gamma_A^T H_{z^{-1}N})\}. \quad (16)$$

由式 (5)、式 (14) 得

$$P_c(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})P_r^*(z^{-1})r(k+N) + (2P_c(z^{-1})M(z^{-1}) - P_c(z^{-1})B(z^{-1}))e(k). \quad (17)$$

所以线性化标称闭环系统的特征多项式为 $P_c(z^{-1})$, 并且和文 [2] 相同. 仿文 [2] 证明 $P_c(z^{-1})$ 稳定, 因此有如下定理.

定理 1 在 $N > N_w + n$ 条件下, 具有扇形性饱和的执行机构在中心处线性化的标称预测控制系统是稳定的, 其特征多项式为 $P_c(z^{-1})$.

$$\text{令 } M_1 = M(z^{-1}) - (z^{-1})P_u(z^{-1}), \quad N_1 = N(z^{-1}) - P_y(z^{-1}),$$

由式 (4) 和式 (10) 有

$$P_c(z^{-1}) = A(z^{-1})M_1 + B(z^{-1})N_1. \quad (18)$$

当 $\delta = 0$ 时, M_1 和 N_1 与 $Q_1(z^{-1})$ 无关, 当 $\delta \neq 0$ 时, 则不能保证. 对任一关于 z^{-1} 的稳定的有理函数 $Q_2(z^{-1})$,

$$\text{令 } Q(z^{-1}) = Q_1(z^{-1}) + Q_2(z^{-1}), \quad X_1 = X(z^{-1}) - z^{-1}P_u(z^{-1}),$$

$$Y_1 = Y(z^{-1}) - P_y(z^{-1}), \quad M_2 = X_1 - B(z^{-1})Q(z^{-1}), \quad N_2 = Y_1 + A(z^{-1})Q(z^{-1}).$$

$$\text{由式 (18) 有 } P_c(z^{-1}) = A(z^{-1})M_2 + B(z^{-1})N_2, \quad (19)$$

式 (19) 为后面的分析和设计服务.

3 鲁棒稳定性分析

考虑具有饱和输入和加性的非线性未建模动态系统的鲁棒稳定性分析. 由式 (4)、式 (10) 及图 1 可得闭环预测控制系统 (图 3).

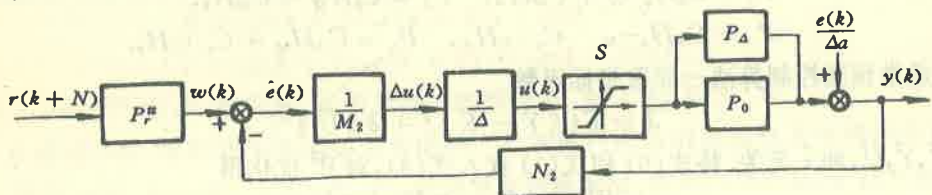


图 3 闭环预测控制系统

定理 2 对系统 $P = P_0 + \Delta P$, 如果以下条件满足

$$1) \|Su(k) - \frac{1}{2}u(k)\| < \frac{1}{2}\|u(k)\|, \quad (20)$$

2) 非线性未建模动态 P_Δ 在扇形 $[-\alpha, \alpha]$ 内, 即:

$$\|P_\Delta u(k)\| \leq \alpha \|u(k)\|, \quad (21)$$

$$3) (\| \frac{z^{-1}b(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \|_\infty + 2\alpha \| \frac{a(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \|_\infty) \|N_2\|_\infty < 1, \quad (22a)$$

$$4) \| \frac{1}{N_2} \|_\infty < \infty, \quad (22b)$$

则闭环预测控制系统是输入输出稳定的 (BIBO).

证 这里考虑鲁棒稳定性, 不妨假定干扰 $d(k) = \frac{e(k)}{\Delta a(z^{-1})} = 0$. 由图 3 得

$$\begin{aligned} u(k) &= \frac{1}{M_2\Delta}w(k) - \frac{N_2}{M_2\Delta}P_0(S - \frac{1}{2})u(k) - \frac{N_2}{M_2\Delta}\frac{1}{2}P_0u(k) - \frac{N_2}{M_2\Delta}P_\Delta Su(k), \\ u(k) &= \frac{2a(z^{-1})}{P_c(z^{-1})}w(k) - \frac{2z^{-1}b(z^{-1})N_2}{P_c(z^{-1})}(S - \frac{1}{2})u(k) - \frac{2a(z^{-1})N_2}{P_c(z^{-1})}P_\Delta Su(k). \end{aligned} \quad (23)$$

式 (23) 两边取模, 利用条件 1)、2)、3) 化简得

$$\|u\| \leq \frac{\| \frac{2a(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \|_\infty}{1 - (\| \frac{z^{-1}b(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \|_\infty + 2\alpha \| \frac{a(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \|_\infty) \|N_2\|_\infty} \|w\|. \quad (24)$$

由图 3 得

$$y(k) = PSu(k) = PS(1 + \frac{N_2}{M_2\Delta}PS)^{-1} \frac{1}{M_2\Delta}w(k) = \frac{1}{N_2}w(k) + \frac{M_2\Delta}{N_2}u(k), \quad (25)$$

$$\|y\| \leq \| \frac{1}{N_2} \|_\infty \|w\| + \| \frac{M_2}{N_2} \|_\infty \|u\|, \quad (26)$$

由式 (24) 代入式 (26) 得 $y(k)$ 有界. 证毕.

4 鲁棒性能设计

下面考虑性能鲁棒性, 即抑制干扰 $d(k) = \frac{e(k)}{\Delta a(z^{-1})}$ 对误差 $\hat{e}(k)$ 的影响, 不妨假定未建模动态 $P_\Delta = 0$ 及 $w(k) = 0$. 由图 3 得

$$\hat{e}(k) = -\frac{A(z^{-1})M_2N_2}{P_c(z^{-1})}d(k) - \frac{A(z^{-1})M_2N_2}{P_c(z^{-1})}P_0(S - \frac{1}{2})\frac{1}{M_2\Delta}\hat{e}(K), \quad (27)$$

$$(1 - \| \frac{z^{-1}b(z^{-1})N_2}{P_c(z^{-1})} \|_\infty) \|\hat{e}\| \leq \| \frac{2a(z^{-1})M_2}{P_c(z^{-1})} \|_\infty \|N_2\|_\infty \|d\|. \quad (28)$$

由式 (28) 可知, 要增强系统对于干扰的抑制作用, 必须使

$$\|w_1(z^{-1}) \frac{2a(z^{-1})M_2}{P_c(z^{-1})}\|_\infty < 1. \quad (29)$$

权函数 $w_1(z^{-1})$ 可取为 $\frac{1}{\epsilon}$, ϵ 是一给定量. 尽管定理 2 条件 (3) 和式 (29) 给出鲁棒稳定及鲁棒性能的条件, 但要构造上述控制器并非易事, 庆幸的是 H_∞ 优化为之提供了解决问题的手段. 下面利用文 [5] 的方法对定理 2 条件 (3) 和式 (29) 进行修正

$$\|(\| \frac{z^{-1}b(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \|_\infty + 2\alpha \| \frac{a(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \|_\infty)^2 |N_2|^2 + |w_1(z^{-1}) \frac{2a(z^{-1})M_2}{P_c(z^{-1})}|^2\|_\infty < 1. \quad (30)$$

令: $R_1 = w_1(z^{-1}) \frac{2a(z^{-1})M_2}{P_c(z^{-1})}X_1, \quad R_2 = w_1(z^{-1}) \frac{2a(z^{-1})M_2}{P_c(z^{-1})}B(z^{-1}),$

$$S_1 = \left(\left\| \frac{z^{-1}b(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \right\|_\infty + 2\alpha \left\| \frac{a(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \right\|_\infty \right)^2 Y_1,$$

$$S_2 = - \left(\left\| \frac{z^{-1}b(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \right\|_\infty + 2\alpha \left\| \frac{a(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \right\|_\infty \right)^2 A(z^{-1}).$$

则式(30)变为

$$\| (R_1 - R_2 Q(z^{-1}))^2 + (S_1 - S_2 Q(z^{-1}))^2 \|_\infty < 1. \quad (31)$$

作谱因子分解

$$\bar{R}_2 R_2 + \bar{S}_2 S_2 = \bar{U}_2 U_2, \text{ 及令 } \bar{R}_2 R_1 + \bar{S}_2 S_1 = \bar{U}_2 U_1, \bar{R}_1 R_1 + \bar{S}_1 S_1 = \bar{U}_1 U_1 + U_3. \quad (32)$$

由式(32), 式(31)变为

$$\| |U_1 - U_2 Q(z^{-1})|^2 + U_3 \|_\infty < 1. \quad (33)$$

由式(32)得 $\overline{1 - U_3} = 1 - U_3$, 作谱分解 $1 - U_3 = \bar{U}_4 U_4$, 因此式(33)等价于

$$\| U_4^{-1} U_1 - U_4^{-1} U_2 Q(z^{-1}) \|_\infty < 1. \quad (34)$$

式(34)为 Nevanlinna-pick 问题^[5], 通过调整权函数使问题可解, $U_4^{-1} U_1 - U_4^{-1} U_2 Q(z^{-1})$ 表示为全通(all-pass)形式, 并由之求得 $Q(z^{-1})$, 从而构造出图3的控制系统, 使其具有较好的鲁棒性能.

5 仿真研究

本节给出仿真结果. 考虑式(2)描述的系统, 其中 $a(z^{-1}) = 1 - 2.65z^{-1} + 1.3z^{-2}$, 极点为 $2, 0.65$. $b(z^{-1}) = 1 - 5z^{-1}$. Bezout 方程式(3)的解为: $X(z^{-1}) = 0.5 + 3.4866z^{-1}$, $Y(z^{-1}) = -3.3232 + 4.8862z^{-1} - 1.813z^{-2}$. 取 $N = 10, N_w = 3, \delta = 5, E_0 = -0.2899E$ (E 为 N 阶单位阵的后 $N - N_w$ 行构成的阵), $\alpha = 0.25, w_1(z^{-1}) = 0.1$, 参考量为方波信号. 标称闭环系统的特征多项式为:

$$P_c(z^{-1}) = 1 - 1.1932z^{-1} + 0.3766z^{-2} - 0.1798z^{-3},$$

式(19)中参数为:

$$X_1(z^{-1}) = 0.5 + 0.2599z^{-1}, \quad Y_1(z^{-1}) = 0.0455 + 0.1126z^{-1} + 0.0676z^{-2}.$$

由式(30)~式(34), 利用文[5]的方法计算得 $Q(z^{-1}) = \frac{-0.057 - 0.277z^{-1}}{1 - 0.65z^{-1}}$, 计算式(30)左边的 H_∞ 范数为 0.806, 因此构造图3的控制系统稳定. 图4给出 300 个采样周期的仿真结果.

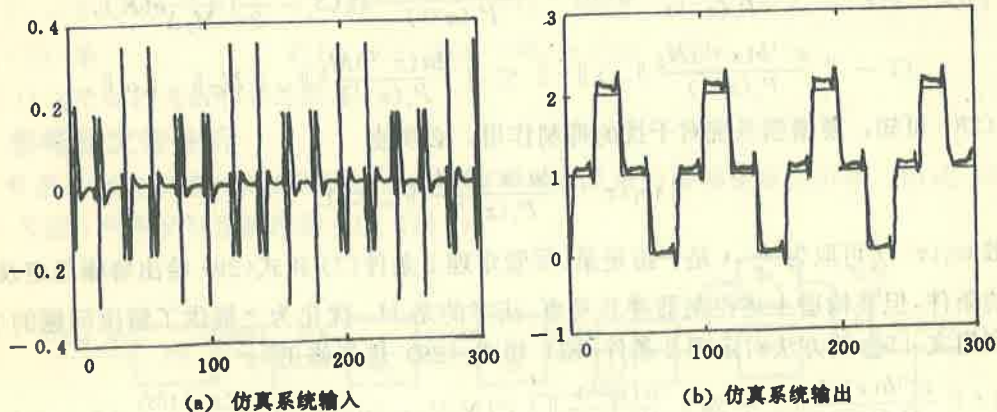


图4 预测控制系统的仿真

6 结论及问题讨论

本文对具有干扰、饱和输入及非线性未建模动态的预测控制系统进行综合设计。文 [2] 是本文 $S = 1, P_\Delta = 0, e(k) = 0$ 的特殊情况。通过对鲁棒稳定和鲁棒性能折中修正, 使鲁棒性能设计转化为 Nevanlinna-Pick 问题, 进而求解鲁棒预测控制器。

在过程控制中, 人们希望设计的控制器是稳定的, 特别对稳定的过程尤其如此。以上设计并不能保证图 3 系统的控制器 $1/M_2$ 是稳定的, 若不考虑式 (30) 的鲁棒性能条件, 容易由式 (19) 构造稳定的控制器 $1/M_2$ 。但若同时要同时考虑鲁棒性能及控制器的稳定性, 则必须有所折中, 对此尚有待进一步地研究。

参 考 文 献

- 1 Bitmead, R. R., Gevers, M. and Wertz, V.. Adaptive optimal control—thinking man's GPC. Prentice-Hall of Australia Pty, 1990, 75—79
- 2 Kouvaritakis, B., Rossiter, J. A. and Chang, A. O. T.. Stable generalized predictive control; an algorithm with guaranteed stability. IEE Pt-D, 1992, 139 (4): 349—362
- 3 Astrom, K. J. and Wittenmark, B.. Computer controlled systems—theory and design. Prentice-Hall, Int., 1984
- 4 Chan, C. W. and Hui, K.. Actuator saturation compensation for self-tuning controllers. Int. J. Control, 1994, 59 (2): 543—560
- 5 Doyle, J. C. et al.. Feedback control theory. Macmillan Pub. Comp., New York, 1992

Stability Analysis of Predictive Control with Saturating Input

LIU Bing, XU Lihong and FENG Chunbo

(Research Institute of Automation, Southeast University • Nanjing, 210096, PRC)

Abstract: In this paper, a synthesizing method of predictive control, with white noise, saturating input and non-linear uncertainty, is studied. The sufficient condition of robust stability (BIBO) is given. Then robust performance problem is transformed into Nevanlinna-Pick case. Finally simulation is illustrated by a numerical example.

Key words: robust predictive control; saturating input; H_∞ optimization; robust performance

本文作者简介

刘 兵 1964 年生。分别于 1985 年、1989 年、1996 年获河南大学学士、浙江大学硕士、东南大学博士学位, 现在在电力部电力自动化研究院系统所工作。目前研究兴趣为预测控制、鲁棒控制、电力系统的稳定性分析等。

冯纯伯 1928 年生。中国科学院院士、俄罗斯自然科学院外籍院士, 东南大学教授、博士生导师。目前研究领域为系统建模、鲁棒控制, 非线性控制等。

徐立鸿 1960 年生。1988 年在上海华东师范大学数学系控制理论专业获理学硕士学位, 1994 年 5 月毕业于东南大学自动化研究所并获工学博士学位, 现为该校机械系教授。目前主要从事预测控制、系统辨识与自适应控制, 鲁棒及智能化控制理论及其应用的研究。