第 14 卷第 2 期
1997 年 4 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 14, No. 2
Apr., 1997

动态协商对策的诱导平衡*

祝世京　戴建设　陈　珽

(华中理工大学系统工程研究所·武汉,430074)

摘要：本文研究了动态对策协商解的问题,提出了动态对策问题在协商解处的诱导平衡的概念,研究了诱导平衡存在的必要条件和充分条件,并分析了线性二次型动态对策问题的诱导平衡.

关键词：动态对策；协商解；诱导平衡

1　动态对策的协商解

考虑时间连续的动态对策问题[1],设有两个决策人 DM_1 和 DM_2,在时段 $[t_0,T)$ 上进行决策,决策系统的动态方程为

$$\dot{x}(t) = f(t,x(t),u_1(t),u_2(t)),\ x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

其中 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 为系统的状态变量,$u_i(t) \in U_i(i = 1,2)$ 为 DM_i 的决策变量,$U_i \subseteq \mathbb{R}^{m_i}$ 为决策的可行域. 决策人 DM_i 的决策目标为极大化目标函数

$$J_i(u_1(t),u_2(t)) = g_i(x(T)) + \int_{t_0}^{T} L_i(t,x(t),u_1(t),u_2(t))\mathrm{d}t. \tag{2}$$

上述对策问题的可行结局集为

$$D = \{(J_1(u_1,u_2),J_2(u_1,u_2)) \mid (u_1,u_2) \in U_1 \times U_2\}. \tag{3}$$

令 $d_i = \max\limits_{u_i\in U_i}\min\limits_{u_j\in U_j} J_i(u_1,u_2)$, $\quad i,j = 1,2;\ i \neq j$,并且假定 $J_i(u_1,u_2)$ 为 u_i 的连续凹函数,那么二元组 (D,d) 构成了一个动态协商问题,其中 $d = (d_1,d_2)$ 称为冲突点. 对于协商问题 (D,d),存在多种意义下的协商解,各种不同的协商解可以统一由下列参数优化问题来描述

$$(\mathrm{DP}) \qquad \max(\mu_1 J_1(u_1,u_2) + \mu_2 J_2(u_1,u_2)),\quad \mathrm{s.t.}\ (u_1,u_2) \in U_1 \times U_2. \tag{4}$$

不同的参量 $\mu = (\mu_1,\mu_2) \in \{(\mu_1,\mu_2) \mid 0 \leqslant \mu_i \leqslant 1, \mu_1 + \mu_2 = 1\}$ 对应于不同的协商解.

对于不同的信息结构,上述优化问题的解具有不同的形式. 本文假定为闭环的完全信息结构,即 $u^* = u^*(t,x(\tau),\tau \leqslant t)$. 令 $u^* = (u_1^*,u_2^*)$ 表示对策问题的某一协商解,$\mu^* = (\mu_1^*,\mu_2^*)$ 为其相应参量,并记 $J = \mu_1^* J_1 + \mu_2^* J_2, L = \mu_1^* L_1 + \mu_2^* L_2$.

命题 1　如果 $J_i(u)$ 为 u 的凹函数,那么 $u^* = (u_1^*,u_2^*)$ 为协商解的充分必要条件为

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = f(t,x^*(t),u_1^*(t),u_2^*(t)),\ x^*(0) = x_0, \\ \dfrac{\partial L(t,x^*(t),u^*(t))}{\partial u(t)} + \lambda'(t)\cdot\dfrac{\partial f(t,x^*(t),u^*(t))}{\partial u(t)} = 0. \end{cases} \tag{5}$$

其中,$\lambda(t)$ 为下列方程

$$\begin{cases} \dot{\lambda}(t) = -\dfrac{\partial L(t,x^*(t),u^*(t))}{\partial x(t)} - \lambda'(t)\dfrac{\partial f(t,x^*(t),u^*(t))}{\partial x(t)}, \\ \lambda(T) = \dfrac{\partial g(x^*(T))}{\partial x(T)}. \end{cases} \tag{6}$$

---

* 国家自然科学基金资助项目.

本文于 1995 年 9 月 4 日收到,1996 年 7 月 8 日收到修改稿.

的解，$x^*(t)$ 为$(u_1^*(t),u_2^*(t))$下的轨迹.

2 协商解的诱导平衡

设 $(J_1^*,J_2^*)\in D$ 为对策系统中某一确认的协商后果，$(u_1^*(t),u_2^*(t))\in U_1\times U_2$ 为相应的协商解，$x^*(t)$ 为相应的状态轨迹，那么，决策人 DM_1 和 DM_2 在$[t_0,T)$上分别按 $u_1^*(t)$ 和 $u_2^*(t)$ 进行决策. 但是，在实际决策过程中，可能会存在某些原因使实际决策偏离协商解，或者是某一方追求更大的收益而违反协议，因此，决策人应该对于后续的决策采用一种诱导控制作用，以使对策过程按协议进行. 决策人诱导控制的信息基础是系统的状态及对方的决策[3]，假定系统为完全信息以及无信息延迟，那么决策人的诱导控制则主要依据对方的决策[4]. 设 $DM_i(i=1,2)$ 采用的策略为 $\gamma_i:u_j\to u_i, u_i=\gamma_i(u_j)$，如果要对 DM_j 有诱导作用，须使 $J_j(\gamma_i(u_j),u_j))$ 在 u_j^* 处最优.

定义 1[2,3] 若策略 $\gamma_i:u_j\to u_i,\gamma_i\in P_i$，使得

$$\arg\max_{u_j}\{J_i(u_1,u_2)\,|\,u_i=\gamma_i(u_j),u_j\in U_j\}=u_j^*,u_i^*=\gamma_i(u_j^*),\quad i,j=1,2,i\neq j \tag{7}$$

成立，则称 γ_i 为 DM_i 在(u_1^*,u_2^*)处的诱导策略，其中 P_i 为其可行策略集.

显然，在对策过程中，DM_1 和 DM_2 可能会同时采用诱导策略来控制后续决策，因而导致诱导平衡.

定义 2 对于动态对策问题的某个协商解 (u_1^*,u_2^*)，如果存在策略对$(\gamma_1,\gamma_2)\in P_1\times P_2$，满足

$$\arg\max J_i(u_i,\gamma_j(u_i))=u_i^*,u_1^*=\gamma_1(u_2^*),u_2^*=\gamma_2(u_1^*),\quad i,j=1,2;\quad i\neq j. \tag{8}$$

则称动态对策问题在 (u_1^*,u_2^*) 处存在诱导平衡，称(γ_1,γ_2)为动态对策问题的平衡诱导策略.

3 平衡诱导策略的存在与设计

首先，仿照[2,5]引入下列记号

$$\begin{aligned}H_i(t,&x^*(t),u_1^*(t),u_2^*(t),\lambda_i(t))\\&=L_i(t,x^*(t),u_1^*(t),u_2^*(t))+\lambda_i'(t)f(t,x^*(t),u_1^*(t),u_2^*(t)),\end{aligned} \tag{9}$$

$$\psi_{ij}(t)=\frac{\partial H_i(t,x^*(t),u_1^*(t),u_2^*(t),\lambda_i(t))}{\partial u_j(t)}, \tag{10}$$

$$\Phi_{ij}(t)=\int_t^T\psi_{ij}'(s)\cdot\psi_{ij}(s)\mathrm{d}s, \tag{11}$$

$$t_{\psi_{ij}}=\inf\{t\,|\,\Phi_{ij}(t)=0\}. \tag{12}$$

式中 $\lambda_i(t)$ 为下列方程的解

$$\dot{\lambda}_i(t)=-\frac{\partial H_i(t,x^*(t),u_1^*(t),u_2^*(t),\lambda(t))}{\partial x(t)},\quad \lambda_i(T)=\frac{\partial g_i(x^*(T))}{\partial x(T)}. \tag{13}$$

由于 $J_i(u_1(t),u_2(t))$ 为 $u_i(t)$ 的凹函数，因此，在$(u_1^*(t),u_2^*(t))$处，有

$$J_i(u_1,u_2)-J_i(u_1^*,u_2^*)\leqslant\nabla_{u_1}J_i(u_1,u_2)\cdot(u_1-u_1^*)+\nabla_{u_2}J_i(u_1,u_2)\cdot(u_2-u_2^*).$$

由文献[2,5]知：

$$\nabla_{u_j}J_i(u_1,u_2)\cdot(u_j-u_j^*)=\int_{t_0}^T\psi_{ij}'(t)\cdot(u_j(t)-u_j^*(t))\mathrm{d}t,\quad i,j=1,2,$$

于是，有

$$J_i(u_1,u_2)-J_i(u_1^*,u_2^*)\leqslant\int_{t_0}^T\psi_{ij}'(t)(u_j-u_j^*)\mathrm{d}t+\int_{t_0}^T\psi_{ii}'(t)(u_i-u_i^*)\mathrm{d}t$$

$$= \int_{t_0}^{t_{\psi_{ii}}} \psi'_{ii}(t)(u_i - u_i^*)\mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_{\psi_{ij}}} \psi'_{ij}(t)(u_j - u_j^*)\mathrm{d}t.$$

因此，如果策略对 (γ_1,γ_2) 满足(8)，即对所有 $u_i(t) \in U_i$，有 $J_i(u_i(t),\gamma_j(u_i(t))) \leqslant J_i(u_i^*(t),\gamma_j(u_i^*(t)))$，$i,j=1,2;i \neq j$，成立，那么必有

$$\int_{t_0}^{t_{\psi_{ij}}} \psi'_{ij}(\gamma_j(u_i(t)) - u_j^*(t))\mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_{\psi_{ii}}} \psi'_{ii}(t)(u_i(t) - u_i^*(t))\mathrm{d}t \leqslant 0 \tag{14}$$

成立. 于是，我们有

定理 1　动态对策问题在 (u_1^*,u_2^*) 处存在诱导平衡的必要条件为

$$t_{\psi_{ij}} \geqslant t_{\psi_{ii}}, \quad i,j=1,2; \quad i \neq j. \tag{15}$$

证　假设 $t_{\psi_{ij}} < t_{\psi_{ii}}$，于是

$$\int_{t_0}^{t_{\psi_{ij}}} \psi'_{ij}(\gamma_j(u_i(t)) - u_j^*(t))\mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_{\psi_{ij}}} \psi'_{ii}(t)(u_i(t) - u_i^*(t))\mathrm{d}t$$
$$+ \int_{t_{\psi_{ij}}}^{t_{\psi_{ii}}} \psi'_{ii}(t)(u_i(t) - u_i^*(t))\mathrm{d}t \leqslant 0.$$

由于 DM_j 只能在 $[t_0,t_{\psi_{ij}}]$ 上设计 $\gamma_j(u_i(t))$，控制 $\int_{t_0}^{t_{\psi_{ij}}} \psi'_{ii}(t)(u_i(t) - u_i^*(t))\mathrm{d}t$ 而不能在 $[t_{\psi_{ij}},t_{\psi_{ii}}]$ 上对 $\int_{t_{\psi_{ij}}}^{t_{\psi_{ii}}} \psi'_{ii}(t)(u_i(t) - u_i^*(t))\mathrm{d}t$ 进行控制，因此存在 $u_i(t) \in U_i$ 使上式不成立，故假设错误，定理得证.

关于动态对策问题的平衡诱导策略的设计，有如下定理：

定理 2　如果 $J_i(u_1,u_2) \in U_1 \times U_2$ 为凹函数，且条件(15)成立，那么，

1) 如果对 $t \in [t_0,t_{\psi_{ii}})$，$\psi_{ij}(t) \neq 0$，$(i,j=1,2,i \neq j)$，那么存在诱导平衡，且平衡诱导策略为

$$u_j(t) = \gamma_j(u_i(t)) = \begin{cases} u_j^*(t) - \dfrac{\psi_{ij}(t)\psi'_{ij}(t)}{\psi'_{ii}(t)\psi_{ii}(t)}(u_i(t) - u_i^*(t)), & t \in [t_0,t_{\psi_{ii}}), \\ u_j^*(t), & t \in [t_{\psi_{ii}},T). \end{cases} \tag{16}$$

2) 如果对于 $t \in [t_0,t_{\psi_{ii}})$，积分 $\int_{t_0}^{T} \dfrac{\psi_{ii}(s)}{\Phi_{ij}(s)}\mathrm{d}s$ 存在，那么存在诱导平衡，平衡诱导策略为

$$u_j(t) = \gamma_j(u_i(t)) = \begin{cases} u_j^*(t) - \psi_{ij}(t)\displaystyle\int_{t_0}^{t} \dfrac{\psi_{ii}(s)}{\Phi_{ij}(s)}(u_i(s) - u_i^*(s))\mathrm{d}s, & t \in [t_0,t_{\psi_{ii}}), \\ u_j^*(t), & t \in [t_{\psi_{ii}},T). \end{cases} \tag{17}$$

证　下面给出以上定理中(2)的证明，(1)的证明相同.

因为 $\int_{t_0}^{T} \dfrac{\psi_{ii}(s)}{\Phi_{ij}(s)}\mathrm{d}s$ 存在，所以式(17)给出的策略有定义.

$$J_i(u_1,u_2) - J_i(u_1^*,u_2^*) \leqslant \nabla_{u_1} J_i \cdot (u_1 - u_1^*) + \nabla_{u_2} J_i \cdot (u_2 - u_2^*)$$

$$= \int_{t_0}^{t_{\psi_{ii}}} \psi'_{ii}(t)(u_i(t) - u_i^*(t))\mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_{\psi_{ij}}} \psi'_{ij}(t)(u_j(t) - u_j^*(t))\mathrm{d}t$$

$$= \int_{t_0}^{t_{\psi_{ii}}} \psi'_{ii}(t)\psi_{ii}(t)(u_i(t) - u_i^*(t))\mathrm{d}t - \int_{t_0}^{t_{\psi_{ii}}} \psi'_{ij}\psi_{ij}\int_{t_0}^{t} \frac{\psi'_{ii}(s)}{\Phi_{ij}(s)}(u_i(s) - u_i^*(s))\mathrm{d}s\mathrm{d}t$$

$$= \int_{t_0}^{t_{\psi_{ii}}} \psi'_{ii}(t)\psi_{ii}(t)(u_i(t) - u_i^*(t))\mathrm{d}t - \int_{t_0}^{t_{\psi_{ii}}} \psi'_{ii}(s) \cdot \psi_{ii}(s)(u_i(s) - u_i^*(s))\mathrm{d}s = 0,$$

所以

$$J_i(u_1(t),u_2(t)) \leqslant J_i(u_1^*(t),u_2^*(t)).$$

4 线性二次型动态对策问题研究

作为实例分析，下面研究线性二次型动态对策问题. 对策系统的状态方程及目标函数为

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B_1(t)u_1(t) + B_2(t)u_2(t), t \in [t_0,T), x(t_0) = x_0, \tag{18}$$

$$J_i(u_1,u_2) = \frac{1}{2}x'(T)\cdot N(x(T))\cdot x(T) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}(x'(t)Q_i(t)x(t) + u_1'(t)R_{i1}(t)u_1(t) + u_2'(t)R_{i2}(t)u_2(t))\mathrm{d}t. \tag{19}$$

其中，Q_i, R_{ij} 为半正定对称阵，R_{ii} 为正定对称阵.

设 $u^* = (u_1^*, u_2^*)$ 为其协商解，$\mu^* = (\mu_1^*, \mu_2^*)$ 为与之相对应的参量，于是有

$$\psi_{ij} = [R_{ij}u_j^* + B_j'K_ix^*](t) = (-R_{ij}(\mu_1^*R_{1i} + \mu_2^*R_{2i})^{-1}B_i'K_i + B_j'K_i)(t)x^*(t)$$

式中 $K_i(t)$ 为下列 Riccati 方程的解

$$\dot{K}_i = -K_iA - A'K_i - Q_i + K_i(\sum_{j=1}^{2}B_j(\mu_1^*R_{j1} + \mu_2^*R_{j2})B_j')K_i, K_i(T) = N_i(x(T)).$$

下面，分两种情况讨论在 (u_1^*, u_2^*) 处的平衡诱导策略.

1) $\psi_{ij}(T) \neq 0$，即 $(B_jN_i - R_{ij}(\mu_1^*R_{j1} + \mu_2^*R_{j2})^{-1}B_j'(\mu_1^*N_1 + \mu_2^*N_2))(T)x^*(T) \neq 0$，那么，$t_{\psi_{ij}} \geqslant t_{\psi_{ii}}$，且 $\int_t^T \psi_{ij}'(t)\psi_{ij}(t)\mathrm{d}t > 0$，因此，$u_j(t) = u_j^*(t) - \psi_{ij}(t)\int_{t_0}^{t}\frac{\psi_{ii}'(s)}{\Phi_{ij}(s)}(u_i(s) - u_i^*(s))\mathrm{d}s$.

2) 对 $t \in [t_0, t_{\psi_{ij}})$，$\psi_{ij}(t) \neq 0$，即 $(-R_{ij}(\mu_1^*R_{1i} + \mu_2^*R_{2i})^{-1}B_i'K + B_j'K_i)x^*(t) \neq 0$，$t \in [t_0, t_{\psi_{ij}})$，那么 $t_{\psi_{ij}} \geqslant t_{\psi_{ii}}$，必存在平衡诱导策略，且

$$u_j(t) = \begin{cases} u_j^*(t) - \dfrac{\psi_{ij}(t)\psi_{ij}'(t)}{\psi_{ii}'(t)\psi_{ii}(t)}(u_i(t) - u_i^*(t)), & t \in [t_0, t_{\psi_{ii}}), \\ u_j^*(t), & t \in [t_{\psi_{ii}}, T). \end{cases}$$

参考文献

1 Basar, T. and Olsder, G. J.. Dynamic noncoopertive game theory. Academic Press, New York, 1982

2 Zheng, Y. P., Basar, T. and Cruz, J. B. JR.. Stackelberg strategies and incentives in multiperson deterministic decision problems. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetic, 1984, 14: 10—24

3 Ho, Y. C., Luh, P. B. and Olsder, G. J.. A control theoretical view on incentives. Automatica, 1982, 18: 167—179

4 Ehtamo, H. and Hamalinen R. P.. Incentive strategies and equilibria for dynamic games with delayed information. Journal of Optimization Theory and Applications, 1989, 63: 355—369

5 曾晓军. 动态 Stackelberg 诱导对策问题. 系统科学与数学, 1991, 11: 361—366

Incentive Equilibria for Dynamic Bargaining Game Problems

ZHU Shijing, DAI Jianshe and CHEN Ting

(Institute of Sysytems Engineering, Huazhong University of Science and Technology · Wuhan, 430074, PRC)

Abstract: Based on the incentive methods of Stackelberg game, the dynamic bargaining game problems are considered and the concept of incentive equilibria about the bargaining solutions is proposed. A sufficient condition and a necessary condition concerning the existence of incentive equilibria are proposed. As an illustrative example, the incentive equilibria for linear-quadratic games are discussed.

Key words: dynamic game; bargaining solution; incentive equilibria

本文作者简介

祝世京 1965 年生，1993 年于华中理工大学获博士学位. 现为华中理工大学系统工程研究所副教授. 主要研究方向为多人决策理论及人工智能.

戴建设 1953 年生. 1976 年毕业于天津大学自动控制专业，1990 年在华中理工大学获博士学位. 现为华中理工大学系统工程研究所教授，所长. 主要研究方向为分布式决策支持系统及人工智能.

陈 珽 1919 年生. 1946 年研究生毕业于交通大学电信研究所. 现为华中理工大学系统工程研究所教授，博士生导师. 长期从事自动控制及系统工程的教学和科研，主要学术方向为决策分析.

(上接第 243 页)

Title	1998	Place	Deadline	Further Information
IFAC Symposium Computation in Economics, Finance and Engineering Economic Systems	June 29-July 1	Cambridge UK	*	Dr. Sean Holly, Dept- of Applied Economics Univ. of Cambridge, Sedgwick Avenue Cambridge CB3 9DE, UK FAX: +44/1223/335475 e-mail: sean.holly@econ.cam.ac.uk
IFAC Workshop Linear Time Delay Systems	July 6-7	Grenoble France	1 Oct. 1997	Prof. Luc Dugard Lab. d'Automatique de Grenoble ENSIEG, BP 46 F-38402 St. Martin d'Heres-Cedex, France FAX+33 4 76 82 63889 e-mail: dugard@lag.ensieg.fr
IFAC Conference System Structure and Control	July 8-10	Nantes France	1 Aug. 1997	Prof. J. J. Loiseau Lab. d'Automatique Nantes, 1, rue de la Noe F-44072 Nantes Cedex 03, France FAX+33 40 37 25 22
IFAC/(IMACS/IFIP)Symposium Large Scale Systems: Theory and Applications	July 15-17	Patras Greece	15 July 1997	IFAC-LSS'98 El. & Computer Engg. Dept. Lab. for Automation & Robotics University of Patras GR-26500 Rion Patras, Greece FAX+30 997 309 e-mail: groumpos@ee.upatras.gr
IFAC Symposium (14th) Automatic Control in Aerospace	Aug. 24-28	Seoul Korea	15 Oct. 1997	The Secretariat IFAC 98 Aero Automatic Control Res. Centre Seoul National University, Seoul 151-742 Korea FAX: +82 2 825 1585 e-mail: ifac98aero@asri.snu.ac.kr
IFAC Symposium Mining, Mineral and Metal Processing-MMM98	Sept. 1-3	Düsseldorf Germany	15 Nov. 1997	VDI-VDE GMA, POB 1011 30 D-40002 Düsseldorf, Germany FAX+49/211/6214-161

(下转第 270 页)