连续和离散系统的鲁棒严格正实性*

唐建国　　赵四化 柏建国
(四川三峡学院电子工程系·四川万县,634000)　(四川轻化工学院电子系·四川自贡,643033)

摘要：本文提出了一种统一的鲁棒严格正实性判定准则,既适用于连续系统,又适用于离散系统,在此准则的基础上,形成了鲁棒严格正实滤波器和补偿器的设计方法.当考虑的系统是线性参数摄动系统或由若干个独立线性参数摄动系统串联成的,则本文给出的是端点结果.

关键词：连续和离散系统；鲁棒严格正实性；参数摄动；端点结果

1　准备知识

记超矩形 $U_i \subset \mathbb{R}_i^m$, $i = 1,2,\cdots k_1$; $V_i \subset \mathbb{R}_i^n$ $i = 1,2,\cdots,k_2$, 分别定义为

$$U_i = \{u_i = [x_{i,1}, x_{i,2}, \cdots, x_{i,m_i}]^{\mathrm{T}} \mid x_{i,j} \in [\underline{x}_{i,j}, \bar{x}_{i,j}], j = 1,2,\cdots,m_i\},$$

$$V_i = \{v_i = [y_{i,1}, y_{i,2}, \cdots, y_{i,n_i}]^{\mathrm{T}} \mid y_{i,j} \in [\underline{y}_{i,j}, \bar{y}_{i,j}], j = 1,2,\cdots,n_i\}.$$

记其顶点集合分别为

$$U_i^* = \{u_i = [x_{i,1}, x_{i,2}, \cdots x_{i,m_i}]^{\mathrm{T}} \mid x_{i,j} \in \{\underline{x}_{i,j}, \bar{x}_{i,j}\}, j = 1,2,\cdots,m_i\},$$

$$V_i^* = \{v_i = [y_{i,1}, y_{i,2}, \cdots, y_{i,n_i}]^{\mathrm{T}} \mid y_{i,j} \in \{\underline{y}_{i,j}, \bar{y}_{i,j}\}, j = 1,2,\cdots,n_i\}.$$

考虑阶次固定的 m, n 次实系数多项式族

$$N_m = \{N(z,u) = \prod_{i=1}^{k_1} N_i(z,u_i) \mid u_i \in U_i, i = 1,2,\cdots,k_1\},$$

$$D_n = \{D(z,v) = \prod_{i=1}^{k_2} D_i(z,v_i) \mid v_i \in V_i, i = 1,2,\cdots,k_2\}.$$

其中多项式 $N_i(z,u_i)$ 的系数为摄动向量 u_i 的仿射线性函数；$D_i(z,v_i)$ 的系数为摄动向量 v_i 的仿射线性函数,阶数 $m \leqslant n$. 记 N_m 和 D_n 的顶点多项式集合分别为

$$N_m^* = \{N(z,u) = \prod_{i=1}^{k_1} N_i(z,u_i) \mid u_i \in U_i^*, i = 1,2,\cdots,k_1\},$$

$$D_m^* = \{D(z,v) = \prod_{i=1}^{k_2} D_i(z,v_i) \mid v_i \in V_i^*, i = 1,2,\cdots,k_2\}.$$

考虑有理函数族：

$$\mathscr{G} = \{G(z,u,v) = \frac{N(z,u)}{D(z,v)} \mid N(z,u) \in N_m, D(z,v) \in D_n\}. \tag{1}$$

记其顶点集为

$$\mathscr{G}^* = \{G(z,u,v) = \frac{N(z,u)}{D(z,v)} \mid N(z,u) \in N_m^*, D(z,v) \in D_n^*\}. \tag{2}$$

记 Λ 为复平面上任意关于实轴对称的单连通区域,作为系统的稳定域.显然,当 Λ 为左半复平面时,考虑的是一般的连续系统；而当 Λ 域指定为单位圆盘时,考虑的就是离散系统.若进一

* 四川省教委重点科研项目资助.

本文于 1995 年 12 月 15 日收到.1996 年 7 月 19 日收到修改稿.

步限制 Λ 域,还可同时兼顾一定的稳定裕度.若 Λ 是关于实轴对称的,记 Λ^p 为上半区域.

定义 1 m 次多项式族 N_m 称为是关于 Λ 域鲁棒稳定的,是指:任取 $N(z,u)\in N_m$,其所有零点都位于 Λ 域之中.

定义 2[4] 有理函数族 $\mathscr{G}$ 称为是关于 Λ 域鲁棒严格正实的(RSPR),是指:

1) N_m 和 D_n 都是关于 Λ 域鲁棒稳定的;

2) $\mathrm{Re}[G(z,u,v)]>0,\ \forall z\in\partial\Lambda,\ G(z,u,v)\in\mathscr{G}$.

引理 1[4] 有理函数族 $\mathscr{G}$ 是关于 Λ 域 RSPR,充要条件为

1) N_m 是关于 Λ 域鲁棒稳定的;

2) $\mathrm{Re}[G(z,u,v)]>0,\ \forall z\in\partial\Lambda,\ G(z,u,v)\in\mathscr{G}$.

对于任意取定的 $z_0\in\partial\Lambda^p$,记多项式的相角为:

$$\psi_N(z_0)=\arg[N(z_0,u)],\quad \psi_D(z_0)=\arg[D(z_0,v)],$$

$$\underline{\psi}_N(z_0)=\min\{\psi_N(z_0)\mid N(z_0,u)\in N_m\},\quad \bar{\psi}_N(z_0)=\max\{\psi_N(z_0)\mid N(z_0,u)\in N_m\},$$

$$\underline{\psi}_D(z_0)=\min\{\psi_D(z_0)\mid D(z_0,v)\in D_n\},\quad \bar{\psi}_N(z_0)=\max\{\psi_D(z_0)\mid D(z_0,v)\in D_n\}.$$

引理 2 有理函数族 $\mathscr{G}$ 关于 Λ 域是 RSPR,充要条件为:

1) N_m 是关于 Λ 域鲁棒稳定的;

2) $\forall\ z_0\in\partial\Lambda^p$,

$$\max\{|\psi_N(z_0)-\psi_D(z_0)|:N(z_0,u)\in N_m,D(z_0,v)\in D_n\}<\frac{\pi}{2}.$$

引理 2 可直接由引理 1 得到,勿须证明.引理 2 虽然可以看成一个判定准则,但由于 $\mathrm{N_m}$ 和 $\mathrm{D_n}$ 中的多项式有无穷多个,涉及无穷检验问题,不便于直接应用.因此,有必要寻找相应的有限检验结果.

引理 3 若 N_m 是关于 Λ 域鲁棒稳定的,则 $\forall\ z_0\in\partial\Lambda^p$,有

$$\underline{\psi}_N(z_0)=\min\{\psi_N(z_0)\mid N(z_0,u)\in N_m^*\},\tag{3}$$

$$\bar{\psi}_N(z_0)=\max\{\psi_N(z_0)\mid N(z_0,u)\in N_m^*\}.\tag{4}$$

证 只证最小值取在端点上,最大值可类似地得到证明.

将 N_m 看成 k_1 个子多项式族相乘而成的多项式族,即 $N_m=\prod_{i=1}^{k_1}N_{mi}$,其中

$$N_{mi}=\{N_i(z,u_i)\mid u_i\in U_i\},\ i=1,2,\cdots,k_1.$$

其端点子集为

$$N_{mi}^*=\{N_i(z,u_i)\mid u_i\in U_i^*\},\ i=1,2,\cdots,k_1.$$

由前面定义知,N_{mi} 是凸多面体多项式族,则对于任意固定的 $z_0\in\partial\Lambda^p$,其值域是复平面上的一个凸多边形.又因为 N_m 是关于 Λ 域鲁棒稳定的,则由剔零原理[2] 知,N_{mi} 的值域必不包含原点.于是,根据凸多边形的几何性质知,当其不包含原点时,必有

$$\underline{\psi}_{Ni}(z_0)=\min\{\psi_{Ni}(z_0)\mid N_i(z_0,u)\in N_{mi}^*\},\ i=1,2,\cdots,k_1.$$

又因为 $\prod_{i=1}^{k_1}N_{mi}^*\subset N_m^*$, $\underline{\psi}_N(z_0)=\sum_{i=1}^{k_1}\underline{\psi}_{Ni}(z_0)$, 所以有

$$\begin{aligned}\underline{\psi}_N(z_0)&=\sum_{i=1}^{k_1}\min\{\psi_{Ni}(z_0)\mid N_i(z_0,u)\in N_{mi}^*\}\\&=\min\{\psi_N(z_0)\mid N(z_0,u)\in N_m^*\}.\end{aligned}$$

同样可证得(4)式也成立.　　证毕.

2 主要结果

2.1 鲁棒严格正实性判定准则

先定义两个相角函数如下:

$$\alpha(z) = \underline{\psi}_N(z) - \overline{\psi}_D(z) + \frac{\pi}{2}, \tag{5}$$

$$\beta(z) = \overline{\psi}_N(z) - \underline{\psi}_D(z) - \frac{\pi}{2}. \tag{6}$$

再定义 N_m 和 D_n 中的标称多项式 $\hat{N}(z,\hat{u})$ 和 $\hat{D}(z,\hat{v})$ 如下:

$$\hat{u}_i = [\hat{x}_{i,1}\hat{x}_{i,2}\cdots\hat{x}_{i,mi}]^{\mathrm{T}} \mid \hat{x}_{i,j} = (\underline{x}_{i,j} + \overline{x}_{i,j})/2,\ i = 1,2,\cdots,k_1,\ j = 1,2,\cdots,m_i,$$

$$\hat{v}_i = [\hat{y}_{i,1}\hat{y}_{i,2}\cdots\hat{y}_{i,ni}]^{\mathrm{T}} \mid \hat{y}_{i,j} = (\underline{y}_{i,j} + \overline{y}_{i,j})/2,\ i = 1,2,\cdots,k_2,\ j = 1,2,\cdots,n_i,$$

$$\hat{N}(z,\hat{u}) = \prod_{i=1}^{k_1}\hat{N}_i(z,\hat{u}_i),\quad \hat{D}(z,\hat{v}) = \prod_{i=1}^{k_2}\hat{D}_i(z,\hat{v}_i).$$

定理 1　有理函数族 $\mathscr{G}$ 是关于 Λ 域 RSPR,充要条件为

1) $\hat{N}(z,\hat{u}) \in N_m$ 是关于 Λ 域稳定的;

2) $\forall\ z_0 \in \partial\Lambda^p$,满足

$$\alpha(z_0) > 0,\quad \beta(z_0) < 0. \tag{7}$$

证　只需证明定理 1 与引理 2 等价即可.必要性:若引理 2 成立,则由引理 2 的条件 1 可推得定理 1 的条件 1 成立,而引理 2 的条件 2 成立,即 $\max\{|\psi_N(z_0) - \psi_D(z_0)| \mid N(z_0,u) \in N_m, D(z_0,v) \in D_n\} < \frac{\pi}{2}$,这又可以分解成如下两个不等式

$$\overline{\psi}_N(z_0) - \underline{\psi}_D(z_0) < \frac{\pi}{2},\quad \overline{\psi}_D(z_0) - \underline{\psi}_N(z_0) < \frac{\pi}{2}.$$

显然,前一个不等式即为 $\beta(z_0) < 0$ 的变形,后一个不等式则为 $\alpha(z_0) > 0$ 的变形.故条件 2 也成立,必要性得性.

充分性:若定理 1 成立,则由定理 1 的条件 2 可推出引理 2 的条件 1 成立.另外,由 $\alpha(z_0) > 0$ 和 $\beta(z_0) < 0$ 还可推得 $\overline{\psi}_N(z_0) - \underline{\psi}_N(z_0) < \pi$ 和 $\overline{\psi}_D(z_0) - \underline{\psi}_D(z_0) < \pi$,结合定理 1 的条件 1,以及 N_m 的阶数不变这一假定可知,N_m 的值域不包含原点,N_m 满足剔零原理,即 N_m 是关于 Λ 域鲁棒稳定的,引理 2 的条件 1 也成立.　　证毕.

推论 1　若 Λ 域为复平面上的单位圆域,则 $\mathscr{G}$ 是关于 Λ 域 RSPR,充要条件为

1) $\hat{N}(z,\hat{u}) \in N_m$ 是 Schur 稳定的;

2) $\alpha(z_0) > 0,\ \beta(z_0) < 0,\quad \forall\ z_0 \in \partial\Lambda^p$.

推论 2　若 Λ 域为左半复平面,则 $\mathscr{G}$ 是关于 Λ 域 RSPR,充要条件为:

1) $\hat{N}(z,\hat{u}) \in N_m$ 是 Hurwitz 稳定的;

2) $\alpha(\mathrm{j}w) > 0, \beta(\mathrm{j}w) < 0,\quad \forall\ w \in \mathbb{R}$.

2.2 滤波器的设计问题

下面考虑这样一个问题,即对于给定的多项式族 N_m 和指定的 Λ 域,怎样设计一个滤波器 $F(z)$,使得 $\forall\ N(z,u) \in N_m$,有理函数 $N(z,u)/F(z)$ 是关于 Λ 域严格正实的.这是系统辨识和自适应控制中保证算法收敛的关键问题[1],具有重要的意义.这里的 $F(z)$ 必须是一个阶数大于等于 m 的,关于 Λ 域稳定的多项式[1].

定理 2 一个关于 Λ 域稳定的滤波器 $F(z)$ 使得有理函数 $N(z,u)/F(z)$ 对任意 $N(z,u) \in N_m$，都是关于 Λ 域严格正实的，充要条件为：

1) $\hat{N}(z,\hat{u}) \in N_m$ 是关于 Λ 域稳定的；

2) $\bar{\psi}(z_0) - \frac{\pi}{2} < \psi_F(z_0) < \underline{\psi}_N(z_0) + \frac{\pi}{2}, \quad \forall\ z_0 \in \Lambda^p.$ (8)

证 显然，只需证明(8)是(7)式在定理 2 特定条件下的结果即可. 可以将(8)式分开写成两个不等式，即 $\underline{\psi}_N(z_0) - \psi_F(z_0) + \frac{\pi}{2} > 0$ 和 $\bar{\psi}_N(z_0) - \psi_F(z_0) - \frac{\pi}{2} < 0$，这相当于定理 1 中 D_n 只有一个多项式 $F(z)$ 的情况，所以(8)式是(7)式的特例，故定理 2 成立. 证毕.

定理 2 为滤波器 $F(z)$ 的设计提供了一个图解设计方法，设计步骤为：先作出 $\bar{\psi}_N(z) - \frac{\pi}{2}$ 和 $\underline{\psi}_N(z) + \frac{\pi}{2}$ 两条随 z 在 $\partial\Lambda^p$ 上扫描的变化曲线，则设计问题变为寻找 $F(z)$，使其幅角函数 $\psi_F(z)$ 随 $z \in \partial\Lambda^p$ 的变化轨迹位于上述两条幅角曲线之间. 对于 Λ 域为左半 S 平面的情况，根据 Bode 图的概念，很容易求得要求的 $F(s)$. 但对于离散系统，Λ 域为单位圆盘，这时就不能简单借用 Bode 图的概念，怎样进行图解还有待研究. 这里根据文[4]中准最优滤波器的概念提出一种经验设计方法，即取

$$F(z) = \hat{N}(z,\hat{u}).$$

可以验证，在一般情况下，这样取定的 $F(z)$ 都满足鲁棒严格正实性的要求，而且很接近文[4]定义的最优滤波器. 下面举例说明.

若 Λ 指定为单位圆域，已知

$$N(z) = (1 - a_1 z^{-1})(1 - a_2 z^{-1}), \quad a_1 \in [1.5,2], \quad a_2 \in [2.5,3.5].$$

试设计满足 RSPR 的滤波器.

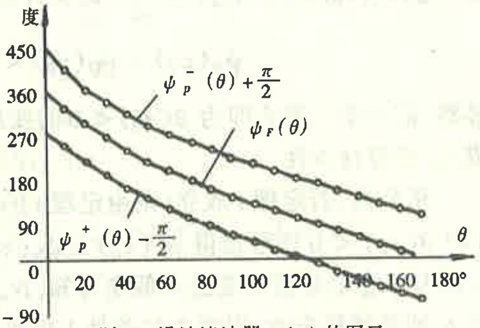

图 1 设计滤波器 $F(z)$ 的图示

对于离散系统，$\partial\Lambda^p$ 为上半单位圆弧，其表达式为 $z = e^{j\theta}, \theta \in [0,\pi]$. 显然，当 θ 由 0 变化到 π，z 正好扫过 $\partial\Lambda^p$. 记 $\bar{\psi}_N(\theta)$ 和 $\underline{\psi}_N(\theta)$ 分别为 $z = e^{j\theta}$ 时，$N(z)$ 幅角的最大值和最小值. 于是可以画出两条曲线 $\bar{\psi}_N(\theta) - \frac{\pi}{2}$ 和 $\underline{\psi}_N(\theta) + \frac{\pi}{2}$，如图 1 所示. 然后按前述方法取

$$F(z) = (1 - 1.75z^{-1})(1 - 3z^{-1}).$$

同样作出 $\psi_F(\theta)$ 曲线，画在图 1 中. 由于 $\psi_F(\theta)$ 曲线位于 $\bar{\psi}(\theta) - \frac{\pi}{2}$ 和 $\underline{\psi}_N(\theta) + \frac{\pi}{2}$ 两条曲线之间，所以能使 $N(z)/F(z)$ 满足鲁棒严格正实性，而且也确实很接近最优的正中间位置.

2.3 RSPR 补偿器的设计

本节考虑这样一个问题，即给定一个对象族 $\mathscr{G}$，是否存在一个补偿器 $C(z)$，使得 $G(z)C(z)$ 对任意 $G(z) \in \mathscr{G}$ 都是严格正实的. 进而，若 $C(z)$ 存在，给出具体的设计步骤.

定理 3 给定有理函数族 $\mathscr{G}$ 和 Λ 域，存在一个补偿器 $C(z)$，使得 $G(z,u,v)C(z)\ \forall\, G(z,u,v) \in \mathscr{G}$ 关于 Λ 域是 RSPR，充要条件为：

1) $\mathscr{G}$ 是关于 Λ 域鲁棒稳定的；

2) $\alpha(z) > \beta(z), \quad \forall\ z \in \partial\Lambda^p.$

这里 $\alpha(z)$ 和 $\beta(z)$ 仍由(5)、(6)两式定义.

证　必要性：由于串联补偿器不能改变对象不稳定的零极点位置，所以条件 1 是必要的．又因为串联补偿器提供的相角是同时加在 $\alpha(z)$ 和 $\beta(z)$ 上的，它只能使 $\alpha(z)$ 和 $\beta(z)$ 曲线的某一段或几段同时向上或向下平行移动，不能改变 $\alpha(z)-\beta(z)$ 的差值．因此，如果在某一段 $\partial\Lambda^p$ 上存在 $\partial(z)\leqslant\beta(z)$，则表明 $\partial(z)$ 和 $\beta(z)$ 曲线有相交的地方，无法用串联补偿器将它们分开．因此，条件 2 也是必要的．

充分性：若 $\alpha(z)>\beta(z)\quad\forall\ z\in\Lambda^p$ 成立，则表明 $\alpha(z)$ 曲线一直位于 $\beta(z)$ 曲线之上．则总可以在其间画一条曲线，记为 $\psi(z)$，然后令 $\beta_c(z)=\beta(z)-\psi(z)$，$\alpha_c(z)=\alpha(z)-\psi(z)$，则必定有 $\alpha_c(z)>0$ 和 $\beta_c(z)<0$．显然，只要补偿器的相角函数 $\psi_c(z)=1/\psi(z)$，则 $C(z)$ 就是一个 RSPR 补偿器．当然，要精确地实现 $\psi_c(z)=1/\psi(z)$ 比较困难，但是要取得相当精度的近似实现往往是容易的，这说明在定理 3 条件下，RSPR 补偿器确实存在，充分性也得证．　证毕．

定理 4　$C(z)$ 是 $\mathscr{G}$ 关于 Λ 域的 RSPR 补偿器，充要条件为：

1) $\hat{G}(z,\hat{u},\hat{v})=\hat{N}(z,\hat{u})/\hat{D}(z,\hat{v})\in\mathscr{G}$，$\hat{G}(z,\hat{u},\hat{v})C(z)$ 是关于 Λ 域稳定的；

2) $\beta(z_0)<-\psi_c(z_0)<\alpha(z_0)$，$\forall\ z_0\in\partial\Lambda^p$．

证　将补偿后的等效对象族记为 W，即

$$W=\{W(z)=C(z)\cdot N(z,u)/D(z,v)\mid N(z,u)\in N_m, D(z,v)\in D_n\}.$$

对于等效对象族，检验函数变为：

$$\alpha_c(z)=\alpha(z)+\psi_c(z),\quad \beta_c(z)=\beta(z)+\psi_c(z).$$

则由条件 2 的 $-\psi_c(z)<\alpha(z)$ 可推得 $\partial_c(z)>0$；同样，由条件 2 的 $-\psi_c(z)>\beta(z)$ 可推得 $\beta_c(z)<0$．这说明对于等效对象族而言，定理 4 的条件 2 与定理 1 的条件 2 是等价的．同时，不难看出，定理 4 的条件 1 也与定理 1 的条件 1 等价．所以，定理 4 与定理 1 等价．　证毕．

定理 4 同样也为 RSPR 补偿器的设计提供了简便的方法．如果是连续系统，则可以借用 Bode 图的概念进行图解，本文作者曾在文[5]中给出了一个设计连续系统 RSPR 补偿器的例子．而给出的是离散系统时，同样由于不能直接借用经典的频率综合技术，怎样在 z 域内设计满足特定要求的 RSPR 补偿器，有待于进一步研究，而如果没有其他限制，可以验证，若 RSPR 补偿器存在，取 $C(z)=1/\hat{G}(z,\hat{u},\hat{v})$，很可能就是一个 RSPR 补偿器．

3　结　论

本文同时考虑了一类系统族的鲁棒严格正实性的分析和综合问题．给出了一系列的端点结果．这些结果既适用于连续系统，又适用于离散系统．可以证明，本文结果对于文[3]考虑的一类多线性相关摄动系统族也是成立的．本文作者还将证明，对于一般的多线性相关摄动系统族，本文结果仍然成立．另外，对于离散系统的设计问题．由于 $F(z)$ 和 $C(z)$ 的相位曲线与函数之间的关系不清楚，本文只给出了一种经验设计方法．虽然这种方法也很简单，而且设计出的 $F(z)$ 或 $C(z)$ 在一般情况下还具有某种意义下的准最优性质，但是这种方法缺乏灵活性，而且当系统阶次较高，不确定性参数的摄动范围又很宽时，有可能失效．更好的设计步骤有待于进一步的研究．

参 考 文 献

1　Anderson, B.D.O., Dasgupta, S., Khargonekar, P.P. and Mansour, M.. Robust strict positive realness: characterization and construction. IEEE. Trans., 1990, CAS-37(7): 869-876

2 Chapllat, H., Dahleh, M. and Bhattacharyya, S.P.. On robust nonlinear stability of interval control systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1990, AC-36(1): 59-67

3 王龙,黄琳.一类多线性相关摄动系统的性能鲁棒性.中国科学(A辑),1995,8:875-882

4 Tesi, A., Vicino, A. and Zappa, G.. Design criteria for robust strict positive realness in adaptive schemes. Automatica, 1994,30(4):643-654

5 Tang, J.G.and Zhou, J.Q.. On the analysis and synthesis of robust strict positive real systems. IEEE Trans on Circuits and systems, 1995,42(9): 553-556

Robust Strict Positive Realness of Continuous and Discrete Systems

TANG Jianguo

(Department of Electronic Engineering, Sichuan Three Gorges College·Sichuan Wanxian, 634000, PRC)

ZHAO Sihua and BAI Jianguo

(Sichuan Institute of Light Industray and Chemical Technology·Sichuan Zigong, 643033, PRC)

Abstract: In this paper, an uniform criterion for robust strict positive realness is presented which is applicable not only to continuous systems but also to discrete systems. Based on it, the methods to design the robust strict positive real filter and compensator are formed. When the considered systems is one with linearly dependent coefficient perturbations or is one formed by cascade of several independent subsystems as above, the results given by this paper are the extreme results.

Key words: continuous and discrete system; robust strict positive realness; coefficient perturbation; extreme result

本文作者简介

唐建国 1954年生.1982年毕业于浙江大学,1991年于四川联合大学获硕士学位.现为四川三峡学院电子工程系(原物理系)副教授.主要研究方向为鲁棒控制,智能控制和模糊控制.

赵四化 1992年毕业于成都电子科技大学,获硕士学位.现为四川轻化工学院副教授,长期从事控制理论教学和研究工作.研究方向为鲁棒控制和神经网络控制.

柏建国 1937年生.1960年毕业于重庆大学.现为四川轻化工学院教授.长期从事控制理论教学和研究工作.主要学术方向为控制理论与智能控制,在国内外发表论文百余篇.