第 14 卷第 3 期　　控制理论与应用　　Vol. 14, No. 3
1997 年 6 月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　Jun., 1997

CIMS 下 MRP-Ⅱ多级生产批量计划问题的研究*

唐立新　杨自厚　王梦光
(东北大学自动控制系·沈阳,110006)

摘要：多级生产批量计划问题的研究与开发不但是一个应用上的难题,也是一个理论的难题[1]. 本文基于问题的性质,从一个新的角度即从调整变量出发,运用遗传算法(GA)随机搜索进行求解;通过仿真实验,测试 6 个问题表明,多级生产批量计划问题的 GA 算法比循环动态规划启发式算法平均改善 5%以上.

关键词：MRP-Ⅱ；多阶段生产系统；批量计划；遗传算法

1 引　　言

MRP-Ⅱ(制造资源计划)是机械制造业的一种生产与库存计划、控制的有效方法. 它是依据产品结构数据,项目提前期数据,根据最终项目的外部需求(独立需求)信息以及中间项目(相关需求)的关联信息,在给定的计划时间范围 T 上,确定全部项目在不同的时间段上的生产数量. 如何确定这些项目的生产数量使得在 T 内项目总的调整费用和库存保管费用之和最小,这个问题就是多级批量计划问题(MLLS).

MLLS 比单级批量计划问题要复杂得多,这是因为多级系统不再象单级系统那样项目之间是独立的,而是相互之间是关联的,对于无能力批量计划问题的发展情况如表 1 所示:

表 1　多级结构无能力限制的批量计划研究简要

作　者	年　份	产品结构类型	算　法
Afentakis et al. [2]	1984	装配结构	拉格朗日松弛和分枝定界结合
Afentakis et al. [3]	1986	一般网络结构	拉格朗日松弛和分枝定界结合
Kuik, et al. [4]	1990	一般网络结构	模拟退火和级到级的启发式算法

遗传算法是用于求解组合最优化问题的有效方法之一[5],本文采用遗传算法来进行求解多级批量计划问题,根据问题的性质,从一个新的角度,即从 0,1 调整变量出发,对遗传编码进行了很大的简化,通过遗传迭代获得近优解. 与启发式算法比较能够改善 5%左右. 以下讨论的问题属于多级装配结构的问题.

2 多级无能力约束批量计划问题的描述及数学模型

2.1 问题的描述

对于多级装配类型的产品结构可用一有向图 $G(V,E)$表示,V 表示节点(项目)的集合,有向弧集合 E 表示加工工序的集合,弧(i,j)表示装配项目 j 需要项目 i, $|V|=N$,我们假设节点按照$\{1,\cdots,N\}$拓扑顺序编号,若装配项目 j 需要项目 i,则编号 $j<i$. 按照图 1 所示,定义如下:

定义 1　项目之间关联系数为装配项目 j 需要项目 i 的数量,表示为 R_{ij},若 $i>j$,则 R_{ij}

---

* 863/CIMS 课题资助项目.

本文于 1995 年 9 月 29 日收到,1996 年 3 月 5 日收到修改稿.

>0;否则 $R_{ij}=0, i>1$;在图 1 中,$R_{21}=1, R_{31}=3, R_{42}=2, R_{52}=4, R_{63}=2$.

定义 2　与项目 i 直接相连的后序项目为紧邻后序,表示为 $su(i), i>1$. 在图 1 中,$su(2)=1, su(3)=1, su(4)=2, su(5)=2, su(6)=3$.

定义 3　项目 i 的所有后序项目的集合为后序集合,表示为 $A(i), i>1$. 在图 1 中,$A(2)=\{1\}, A(3)=\{1\}, A(4)=\{2,1\}, A(5)=\{2,1\}, A(6)=\{3,1\}$.

定义 4　与项目 i 直接相连的前序项目的集合为紧邻前序集合,表示 $B(i)$,在图 1 中,$B(1)=\{2,3\}, B(2)=\{4,5\}, B(3)=\{6\}$.

定义 5　项目 i 的所有前序项目的集合为前序集合,表示为 $C(i)$,在图 1 中,$C(1)=\{2,3,4,5,6\}, C(2)=\{4,5\}, C(3)=\{6\}$.

定义 6　从项目 i 到项目 1 的路径 $P(i)$ 为一有序节点集合 $\{i=i_1, i_2, \cdots, i_q=1\}$. 其中,$(i_k, i_{k+1})\in E, k=1,\cdots,q-1$.

在图 1 中,$P(1)=\{1\}, P(2)=\{2,1\}, P(3)=\{3,1\}, P(4)=\{4,2,1\}, P(5)=\{5,2,1\}, P(6)=\{6,3,1\}$.

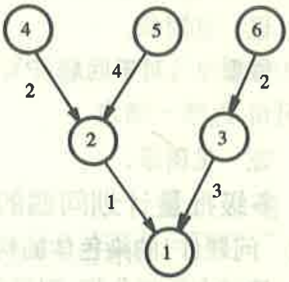

图 1　产品结构图

2.2　问题的数学模型

我们假设

1) 每个项目的提前期为 1; 2) 不允许缺货.

则无能力约束 MLLS 问题的数学模型如下:

(P6)

$$\text{minimize:}\ Z=\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}(h_i I_{it}+s_i Y_{it}), \tag{1}$$

subject to:

$$I_{1,t-1}+X_{1t}-I_{1t}=d_{1t}, \quad t=1,\cdots,T; \tag{2}$$

$$I_{i,t-1}+X_{it}-I_{it}=R_{i,su(i)}X_{su(i),t}, \quad i=2,\cdots,N; \quad t=1,\cdots,T; \tag{3}$$

$$X_{it}\leqslant MY_{it}, \quad i=1,\cdots,N; \quad t=1,\cdots,T; \tag{4}$$

$$Y_{it}\in\{0,1\}, \quad i=1,\cdots,N; \quad t=1,\cdots,T; \tag{5}$$

$$X_{it}\geqslant 0, \quad i=1,\cdots,N; \quad t=1,\cdots,T; \tag{6}$$

$$I_{it}\geqslant 0, \quad i=1,\cdots,N; \quad t=1,\cdots,T; \tag{7}$$

$$I_{i0}=I_{iT}=0, \quad i=1,\cdots,N. \tag{8}$$

其中已知量为:N—— 生产项目种数;T—— 计划范围长度;M—— 非常大的正数;d_{1t}—— 项目 1 在 t 时段的外部需求;h_i—— 项目 i 的单位库存费用;s_i—— 项目 i 的调整费用. 决策变量为:X_{it}—— 项目 i 在 t 时段的生产数量;Y_{it}—— 项目 i 在 t 时段的生产调整变量;I_{it}—— 项目 i 在 t 时段末的库存量.

目标函数(1)使得在整个计划范围内项目总的调整费用和库存保管费用之和最小,约束(2)表示满足外部需求的物流平衡方程,约束(3)表示满足相关需求的物流平衡方程,约束(4)表示只有当生产数量大于 0 时才能发生调整费用,约束(5)表示 Y_{it} 是 0 或 1 调整变量,约束(6)表示每个生产周期的生产数量为非负的,约束(7)表示不允许缺货,约束(8)表示初始和结束周期的库存为 0 状态.

3　问题的最优解的性质

满足问题(P)的最优解具有如下性质:

性质 1 满足模型(P)的最优解具有如下特点:

设 $i>1$ 时, $d_{it}=R_{i,su(i)}*X_{su(i),t}$, 则有:

1) $I_{i,t-1}X_{it}=0,\quad i=1,\cdots,N;\quad t=1,\cdots,T;$

2) 如果 $X_{it}>0$, 则 $X_{it}=\sum\limits_{k=t}^{r}d_{ik}$. 其中 $i=1,\cdots,N;\quad t\leqslant r\leqslant T;$

3) 如果 $I_{it}>0$, 则 $I_{it}=\sum\limits_{k=t+1}^{q}d_{ik}$. 其中 $i=1,\cdots,N;\quad t+1\leqslant q\leqslant T$.

证 见附录.

性质 2 对于问题(P), 如果 Y_{it} 给定, $i\in[1,\ N]$, $t\in[1,\ T]$, 则此时问题的最优解 X_{it}, I_{it} 可由 Y_{it} 唯一确定.

证 见附录.

4 多级批量计划问题的遗传算法

4.1 问题(P)的染色体的构造

通过上面的分析, 问题(P6)的染色体构造如下:

1) 只使用变量 Y_{it} 且用 0,1 码来构造染色体基因;

2) 用矩阵结构来表达染色体结构, 行表示各项目, 列表示对应各项目不同周期的调整变量的值;

3) 利用性质 2, 由基因 Y_{it} 的值通过译码程序确定变量 X_{it} 和 I_{it} 的值.

设 A 表示 $N*T$ 维染色体结构矩阵, A 的元素 a_{it} 表示项目 i 在周期 t 的调整变量的值即 Y_{it} 的值, 对于元素 a_{it} 有如下规定:

① 当 $t<\tau$ 时, $a_{it}=0$;

② 当 $t=\tau$ 时, $a_{it}=1$;

③ 当 $t>\tau$ 时, $a_{it}=R(0,1)$;

其中 $\tau=\min\{t\mid d_{it}>0\}$, $t=1,\cdots,T$, $R(0,1)$——随机产生 0 或 1 的发生器.

4.2 译码(可行化)过程计算

因为染色体的基因只是对应 Y_{it} 的值, 而必须通过译码程序计算 X_{it}, I_{it} 的值, $\forall\, i\in\{1,\cdots,N\}$, $\forall\, t\in\{1,\cdots,T\}$ 有如下关系:

1) 当 $Y_{it}=0$ 时, $X_{it}=0$;

2) 当 $Y_{it}=1$ 时, 令 $Y_{i,T+1}=1$, $L=\min\{k\mid Y_{ik}=1\}$, 则 $k=t+1,\cdots,T+1$.

其中

$$X_{1t}=\sum_{k=t}^{L-1}d_{1,k},\tag{9}$$

$$X_{it}=\sum_{k=t}^{L-1}R_{i,su(i)}X_{su(i),k},\quad i=2,\cdots,N.\tag{10}$$

3)
$$I_{1t}=\sum_{k=1}^{t}X_{1k}-\sum_{k=1}^{t}d_{1k};\tag{11}$$

$$I_{it}=\sum_{k=1}^{t}X_{ik}-\sum_{k=1}^{t}R_{i,su(i)}*X_{su(i),k},\quad i=2,\cdots,N.\tag{12}$$

4) 异常处理:

当 $Y_{it}=1$ 时, 有时出现 $X_{it}=0$, 这时计算目标函数时应作如下处理:

若 $X_{it} = 0$ 时,则 $Y_{1t} = 0$,否则 $Y_{it} = 1$. 其中 $i = 1, \cdots, N$.

4.3 适应性函数的选择

选择 $f = C_{\max} - Z$,而 $Z = \sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}(h_i I_{it} + s_i Y_{it})$ 作为适应性函数,其中 $C_{\max}$ 为一大于 Z 的正数,这样就把求最小问题转化为求最大问题,以便应用选择规则中的滚动轮策略.

4.4 遗传算子

1) 交叉规则:对由调整模式构成的染色体各行独立进行交叉,每一行运用位交叉方法进行交叉.

2) 变异规则:各行进行独立变异,对于每一行只允许从基因大于 0 以后的位置开始变异,每一行采用值变异策略进行变异.

5 应用实例和仿真结果

表 2 模型原始信息参数

项目号	结构参数 $su(i)$	结构参数 $R(i, su(i))$	单位费用系数 库存费用	单位费用系数 项目调整费用
1	0	0	1	130
2	1	1	2	120
3	1	3	1	25
4	2	2	2	30
5	2	4	3	30
6	3	2	1	40

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d_{1t}	32	41	148	36	120	28	32	12	30	10

用 MS.C6.0 对本文提出的算法进行编程,我们考虑 10 个周期,6 个项目,3 级的批量计划问题,问题的参数数据如表 2 所示. 分别采用本文提出的算法和文献[4]提供的级与级的启发式算法进行计算,计算结果如表 3 所示,并通过大量例子进行验证,结果如表 4 所示.

表 3 实例的计算结果

项目号	无能力约束 MLLS 问题/GA 的结果 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	← t →	无能力约束 MLLS 问题/Heuristic 的结果 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	257	0	0	0	232	0	0	0	0	0		73	0	184	0	148	0	84	0	0	0
2	257	0	0	0	232	0	0	0	0	0		73	0	184	0	148	0	84	0	0	0
3	771	0	0	0	696	0	0	0	0	0		219	0	552	0	444	0	252	0	0	0
4	514	0	0	0	464	0	0	0	0	0		146	0	368	0	296	0	168	0	0	0
5	1028	0	0	0	928	0	0	0	0	0		292	0	736	0	592	0	336	0	0	0
6	2313	0	0	0	2088	0	0	0	0	0		657	0	1656	0	1332	0	756	0	0	0
	目标函数值 $Z_1 = 1493$											目标函数值 $Z_2 = 1707$									

6 结束语

本文对 MRP-Ⅱ中的多级装配结构的 MLLS 问题,基于问题的性质,从一个新的角度即从调整变量出发,对遗传编码进行很大的简化,构造了遗传算法,这为批量问题的研究与应用提供了一个新的思想,是遗传算法在批量计划问题上的首次应用. 实验结果表明,遗传算法效果比启发式算法好,平均改善 5% 以上.

表 4 计算结果

问题		无能力约束 MLLS 问题/GA					启发式算法	比较
	$N\times L\times T$	PoP-size	Pc	Pm	max-gen	Z_{1*}	Z_{2*}	δ
1	6×3×10	20	0.90~0.95	0.08~0.10	1000	1493.00	1707.00	14.33
2	6×3×12	20	0.90~0.95	0.08~0.10	1000	1363.00	1454.00	4.14
3	6×3×15	20	0.90~0.95	0.08~0.10	1000	1761.00	1834.00	4.14
4	9×3×10	20	0.90~0.95	0.08~0.10	1000	1690.00	1771.00	4.79
5	9×3×12	20	0.90~0.95	0.08~0.10	1000	1860.00	2030.00	9.13
6	9×3×15	20	0.90~0.95	0.08~0.10	1000	2282.00	2327.00	1.97

注：N——项目总数；L——级数；T——计划范围；PoP-size——染色体数目；P_c——交叉概率；P_m——变异概率；mxa-gen ——迭代最大代数；Z_{1*}——遗传算法运行结果；Z_{2*}——启发式运行结果；δ——100 * $(Z_{2*}-Z_{1*})/Z_{1*}$.

参 考 文 献

1 Bahl, H.C., Ritzman, L.P. and Gupta, J.N.D.. Determining lot-sizing and resource requirements: A review. Operational Research, 1987, 35(3): 329-345

2 Afentakis, P., Gavish, B. and Karmarkar, U.. Computationally efficient optimal solutions to the lot-sizing problemin multistage assembly system. Management Science, 1984, 30(2): 229-239

3 Afentakis, P., Gavish, B.. Optimal lot-sizing algorithms for complex product structures. Management Science, 1986, 30(2): 229-239

4 Kuik, K. and Salomon, M.. The multi-level lot-sizing program evaluation of a simulated-annealing. European Journal of Operation Research, 1990, 45(6): 25-37

5 McClain, J.O., Thomas, L.J. and Weiss, E. N.. Efficient solution to a linear programming model for production scheduling with capacity constraints. IIE Transaction, 1989, 21(2): 144-152

6 Goldberg, D.. Genetic algorithms in search, optimization and machine learning. Addision-Wesley, Reading, MA, 1989

7 唐立新. CIMS下生产批量计划方法的研究. 东北大学博士论文, 1995

附 录[7]

性质 1 的证明.

证 1) 运用反证法. 设最优解集合为 $S=\{I_{i,t}, X_{it}, Y_{it}, i=1,\cdots,N;\ t=1,\cdots,T\}$，对于最优解，假设 $I_{i,t-1}*X_{it}=0$ 不成立，即 $I_{i,t-1}*X_{it}>0$，则一定存在一个策略，从 1 到 $t-1$ 周期之间的某一个周期 $k(1\leqslant k\leqslant t-1)$ 移动数量 C 到周期 t，其中 $0<C<\min\{d_{i,k}, I_{i,k}\}$，则周期 t 的生产数量变为 $X'_{it}=X_{it}+C$，周期 $t-1$ 的库存为 $I'_{i,t-1}=I_{i,t-1}-C$，保证其它策略不变，设移动前的目标函数值为 Z，移动后的目标函数值为 Z'，则存在 $Z'=Z-(t-k)h_i*C$，其中 $(t-k)\times h_i\times C>0$，则 $Z'<Z$，这与 X_{it}, I_{it} 为最优解相矛盾，所以假设 $I_{i,t-1}*X_{it}>0$ 不成立. 所以 $I_{i,t-1}X_{it}=0$ 成立.

2) 设最优解集合为 $S=\{I_{i,t}, X_{it}, Y_{it}, i=1,\cdots,N; t=1,\cdots,T\}$，由性质(1) $I_{i,t-1}*X_{it}=0$，即如果 $I_{i,t-1}>0$，则一定有 $X_{it}=0$；如果 $X_{it}>0$，则一定有 $I_{i,t-1}=0$. 对于 $X_{it}>0$，设 $r=\min\limits_{p=t,\cdots,T}\{p\mid I_{i,p}=0\}$，$t\leqslant r\leqslant T$，分成以下几种情况进行证明：

a) 当 $r=t$ 时，则 $X_{it}=d_{it}$；

b) 当 $t+1\leqslant r\leqslant T$ 时，$\forall q\in[t,r)$，有 $I_{iq}>0$，根据性质 1 中的 1)，则 $X_{i,q+1}=0$，因为 $X_{it}>0$，则 $I_{i,t-1}=0$，因为 X_{it} 和 I_{it} 之间存在如下关系：

$$X_{i1}=I_{i1}-I_{i0}+d_{i1}, \tag{1A}$$

$$X_{i2}=I_{i2}-I_{i1}+d_{i2}, \tag{2A}$$

$$\cdots$$

$$X_{it} = I_{it} - I_{i,t-1} + d_{it}, \tag{3A}$$

$$\cdots$$

由上可得到如下关系：

$$\sum_{k=t}^{r} X_{ik} = I_{ir} - I_{i,t-1} + \sum_{k=t}^{r} d_{ik}. \tag{4A}$$

因为 $I_{ir}=0$，且当 $X_{it}>0$ 时，$I_{i,t-1}=0$，则

$$X_{it} = \sum_{k=t}^{r} d_{ik},\quad 其中\ i = 1,\cdots,N, t+1 \leqslant r \leqslant T.$$

综合 a)和 b)，则

$$X_{it} = \sum_{k=t}^{r} d_{ik},$$

其中 $i=1,\cdots,N, t\leqslant r\leqslant T$，故得证．

3) 因为 $X_{it}=I_{it}-I_{i,t-1}+d_{i,t}$，分以下两种情况证明：

a) 当 $X_{it}>0$ 时，则 $I_{i,t-1}=0$，有

$$I_{it} = \sum_{k=t}^{q} d_{ik} - d_{it}.\ 其中\quad i=1,\cdots,N; t\leqslant q\leqslant T.$$

如果 $I_{i,t}>0$，即 $q>t$，所以有：

$$I_{it} = \sum_{k=t+1}^{q} d_{ik}.\quad 其中\quad i=1,\cdots,N; t+1\leqslant q\leqslant T.$$

b) 当 $X_{it}=0$ 时，设 $p=\max\{k\mid X_{i,k}>0\}, k=1,\cdots,t-1$，由(4A)得

$$\sum_{k=p}^{t} X_{ik} = I_{it} - I_{i,p-1} + \sum_{k=p}^{t} d_{ik}. \tag{5A}$$

因为 $\forall k\in(p,t]$，有 $X_{i,k}=0$，且因 $X_{i,p}>0$，有 $I_{i,p}>0$，所以由(5A)可得如下关系：

$$X_{ip} = I_{it} + \sum_{k=p}^{t} d_{ik}.$$

由性质 1 中 2)得 $X_{it}=\sum_{k=p}^{q} d_{ik}$，如果 $I_{it}>0$，则 $t+1\leqslant q\leqslant T$，所以

$$I_{it} = \sum_{k=t+1}^{q} d_{ik},\quad 其中\quad i=1,\cdots,N;\quad t+1\leqslant q\leqslant T.$$

综合 a)和 b)，性质 3)得证．

性质 2 的证明．　对给定调整模式 Y_{it}，变量上限的处理策略：

$$p'_{it} = \begin{cases} p_{it}, & 如果\ Y_{it}=1; \\ \infty, & 如果\ Y_{it}=0. \end{cases}$$

这样就取消了变量的上限约束，则模型变换为如下形式：

minimize:　$Z = \sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}(p'_{it}X_{it} + h_{it}I_{it}) + E,$

subject to:

$$I_{i,t-1} + X_{it} - R_{i,su[i]}X_{su[i],t} - I_{it} = d_{it},\quad i=1,\cdots,N;\quad t=1,\cdots,T,$$

$$X_{it}\geqslant 0,\quad i=1,\cdots,N;\quad t=1,\cdots,T,$$

$$I_{it}\geqslant 0,\quad i=1,\cdots,N;\quad t=1,\cdots,T,$$

$$I_{i0} = I_{iT} = 0,\quad i=1,\cdots,N.$$

其中

$$E = \sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T} s_{it} * Y_{it}.$$

上述问题可按照文献[5]提供的方法进行对偶，其对偶形式如下：

Flash-Dual：

Max. $$\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T} d_{it}\Pi_{it},$$

subject to

$$-\Pi_{it}+\Pi_{i,t+1}\leqslant h_{it},\quad i=1,\cdots,N;\quad t=1,\ \cdots,T-1;$$

$$\Pi_{it}-\sum_{j\in B(i)} R_{ji}*\Pi_{jt}\leqslant p'_{it},\quad i=1,\cdots,N;\quad t=1,\cdots,T;$$

Π_{it}——无符号限制的对偶变量.

当 $t>T$ 时，$\Pi_{it}=0$. 当 $t\leqslant 0$ 时，$\Pi_{it}=\infty$.

根据文献[5]的定理证明，Flash-Dual 的最优解具有如下性质：

$$\Pi_{it}=\min\{h_{i,t-1}+\Pi_{i,t-1},\ p'_{it}+\sum_{j\in B(i)} R_{ji}*\Pi_{jt}\}.$$

其中 $i=N,\cdots,l;t=1,\cdots,T$. 若 $\Pi_{it}=h_{i,t-1}+\Pi_{i,t-1}$，则 $I_{i,t-1}=I_{it}+d_{it}$，

$$X_{it}=0;\quad 否则\quad I_{i,t-1}=0,\quad X_{it}=I_{it}+d_{it}.$$

可见，给定一组调整模式，唯一对应一组 p'_{it} 的值，在 p'_{it} 已知的情况下，Π_{it} 可唯一确定，从而唯一确定 X_{it} 和 I_{it} 的值. 所在，对于原问题，如果 Y_{it} 给定，$i\in[1,N]$，$t\in[1,T]$，则此时问题的最优解 X_{it}，I_{it} 可由 Y_{it} 唯一确定. 原命题成立.

Research for Lot-Sizing Problem of MRP-Ⅱ in CIMS

TANG Lixin, YANG Zihou and WANG Mengguang

(Department of Automatic Control, Northeastern University· Shenyang, 110006, PRC)

Abstract: The multi-level lot sizing problem is not only theoreticall "hard", but also computationally very difficult handle. In this paper we propose a new genetic stochastic search method to solve MLLS based on properties of the solution of MLLS; Computational results of 6 tested problems show that the average improvenment percent given by MLLS/GA algorithm is over 5% as compared to MLLS/Heuristic solutions.

Key words: MRP-Ⅱ; multi-level; lot-sizing; genetic algorithm

本文作者简介

唐立新 1966年生. 1988年毕业于东北大学自动控制系，1991年研究生毕业于东北大学系统工程专业. 1995年博士毕业. 1996年在香港科技大学工业工程系做博士后研究. 研究方向为机械与冶金 CIMS 中的生产批量计划的理论方法研究.

杨自厚 1926年生. 1950年毕业于武汉大学电机系，现为东北大学自动控制系教授. 研究领域为生产排序问题，决策支持系统构造及其应用.

王梦光 1936年生. 1958年毕业于东北工学院自动控制系. 现为东北大学自动控制系教授. 研究领域为冶金 CIM 和机械 CIM 中的生产计划与调度方法研究.