第 14 卷第 3 期
1997 年 6 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 14, No. 3
Jun., 1997

线性连续时间系统的鲁棒自适应控制*

赵晓晖 冯纯伯
(长春邮电学院通信工程系·长春, 130012) (东南大学自动化研究所·南京, 210096)

摘要: 本文解决了参数未知、具有非结构性未建模误差和有界恒定扰动的一类线性连续系统的自适应控制问题. 文中给出的自适应控制器对上述干扰具有鲁棒性, 它能保证自适应系统的稳定运行且无奇异性产生.

关键词: 未建模误差; 有界恒定扰动; 鲁棒性; 全局稳定性

1 引 言

在自适应控制系统的分析和综合过程中, 都要依据描述被控对象的一类数学模型来进行. 然而, 实际工业过程中的被控对象其动态特性是不可能用精确的线性微分方程描述的, 也就是说被控系统和其数学模型间不可避免地存在未建模误差. 这种误差轻者使系统的性能下降, 重者导致闭环系统丧失稳定性. 因此研究具有未建模误差的鲁棒自适应控制既富有理论意义又具有工程实用价值. 对于此类问题文献多采用引入某种持续激励信号的方法, 或对系统的未知参数和未建模动态做出许多先验假设以便保证能够建立闭环系统的稳定性[1]. 这类方法给自适应控制理论的应用带来诸多不便和困难[5]. 本文是文献[5]和[6]重要理论结果的自然发展. 文[5]研究了理想情况下的自适应控制器设计问题, 而文[6]只对具有界扰动系统进行了较初步的讨论. 简单直接地推广和应用两文的结论于具有未建模误差和有界扰动的系统是不可能的, 尚有许多工作要做. 本文的结果首次给出了针对上述扰动具有鲁棒性的自适应极点配置控制器, 该控制方法保留了文[5]和[6]中控制器具非奇异性这一重要性质, 同时保证在未建模误差系数 μ 小于某一阈值时闭环系统的全局稳定性.

2 系统未知参数的辨识

考虑下述时不变单输入单输出连续时间系统

$$A(D)^{*} y = B(D)^{*} u + v. \tag{1}$$

式中 u, y 和 v 分别是该系统的输入, 输出和外界干扰信号. $D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 是一微分算子. $A(D)^{*}$ 和 $B(D)^{*}$ 多项式分别表为 $A(D)^{*} = D^{n} + a_1^{*} D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}^{*} D + a_n^{*}$ 和 $B(D)^{*} = b_1 D^{n-2} + \cdots + b_{n-1}^{*} D + b_n^{*}$.

为了保证系统中不存在 u, y 和 v 的各阶微分项, 以建立可实现的自适应控制器, 需引入一滤波器 $F(D)$ 使得 $F(D) u_f = u, F(D) y_f = y$, 和 $F(D) v_f = v$.

式中 $F(D) = D^{n} + f_1 D^{n-1} + \cdots + f_{n-1} D + f_n$ 是一 Hurwitz 多项式. 经过滤波后(1)式可以写成如下形式

$$y_f^{(n)} = \varphi^{\mathrm{T}} \theta^{*} + v_f. \tag{2}$$

式中未知参数向量和数据向量分别为 $\theta^{*} = [b_1^{*}, b_2^{*}, \cdots b_n^{*}, a_1^{*}, a_2^{*}, \cdots, a_n^{*}]^{\mathrm{T}}$ 和 $\varphi =$

* 国家自然科学基金资助项目(69574005).

本文于 1995 年 11 月 29 日收到. 1996 年 7 月 1 日收到修改稿.

$[u_f^{(n-1)}, u_f^{(n-2)}, \cdots, u_f, -y_f^{(n-1)}, -y_f^{(n-2)}, \cdots, -y_f]^{\mathrm{T}}$.

在本文中对系统(1)式做如下假设:

假设 1 多项式 $A(D)^*$ 和 $B(D)^*$ 互质且系统阶次 n 已知.

假设 2 外界扰动 v_f 满足下述不等式

$$v_f^2 \leqslant \eta + \mu \| \varphi \|_2^2, \quad \eta \geqslant 0, \quad \mu \geqslant 0. \tag{3}$$

式中 $\|\cdot\|_2$ 是欧几里德范数,而且该扰动的系数 η 和 μ 均已知.可知该类扰动几乎包括了目前文献中的各种不同的干扰.如有界恒值扰动,未建模动态的相关干扰等.未知参数 θ^* 可采用带有死区的最小二乘辨识算法来在线估计

$$\dot{\tilde{\theta}} = \dot{\theta} = \frac{\lambda P \varphi e}{1 + \varphi^{\mathrm{T}} P \varphi}, \quad \tilde{\theta} = \theta - \theta^*, \tag{4}$$

$$\dot{P} = -\frac{\lambda P \varphi \varphi^{\mathrm{T}} P}{1 + \varphi^{\mathrm{T}} P \varphi}, \quad P(0) = I. \tag{5}$$

式中 $\theta = [b_1, b_2, \cdots, b_n, a_1, a_2, \cdots, a_n]^{\mathrm{T}}$ 是 θ^* 的估计值,且

$$\lambda \triangleq \begin{cases} 0, & \text{如果 } e_s \leqslant \alpha_1 \Delta, \\ \left(\dfrac{f}{e_s}\right)^2, & \text{其它}. \end{cases} \tag{6}$$

式中 $\alpha_1 > 1$,而

$$f \triangleq e_s - \alpha_1 \Delta, \quad \Delta = \sqrt{\eta + \mu \| \varphi \|_2^2}, \quad e_s = \sqrt{e^2 + \varphi^{\mathrm{T}} P^2 \varphi}, \quad e = y_f^{(n)} - \varphi^{\mathrm{T}} \theta. \tag{7}$$

参数辨识算法(4)~(7)式的主要收敛性质可概括于下面的定理中.

定理 1 参数辨识算法(4)~(7)式在假设条件 2 下具有如下收敛性质:

P1) θ 和 P 有界收敛.

P2) $\tilde{\theta}^{\mathrm{T}} P^{-1} \tilde{\theta} \leqslant V(0)$, $V(0)$ 是 $V = \tilde{\theta}^{\mathrm{T}} P^{-1} \tilde{\theta} + \mathrm{tr} P$ 在 $t = 0$ 时刻的值, $\mathrm{tr} P$ 是矩阵 P 的迹.

P3) $\tilde{f} \triangleq \dfrac{f}{1 + \varphi^{\mathrm{T}} P \varphi} \in \mathscr{L}_2$.

证 定义一 Lyapunov 函数

$$V = \tilde{\theta}^{\mathrm{T}} P^{-1} \tilde{\theta} + \mathrm{tr} P. \tag{8}$$

对(8)式求时间的导数有

$$\dot{V} = \dot{\tilde{\theta}}^{\mathrm{T}} P^{-1} \tilde{\theta} + \tilde{\theta}^{\mathrm{T}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(P^{-1} \tilde{\theta}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{tr} P) = \frac{\lambda (v_f^2 - e^2)}{1 + \varphi^{\mathrm{T}} P \varphi} - \frac{\lambda \varphi^{\mathrm{T}} P^2 \varphi}{1 + \varphi^{\mathrm{T}} P \varphi}$$

$$\leqslant \frac{\lambda \Delta^2 - \lambda e_s^2}{1 + \varphi^{\mathrm{T}} P \varphi} \leqslant \frac{\lambda \dfrac{e_s^2}{\alpha_1^2} - \lambda e_s^2}{1 + \varphi^{\mathrm{T}} P \varphi} \tag{9}$$

$$= -\frac{\alpha_1^2 - 1}{\alpha_1^2} \cdot \frac{\lambda e_s^2}{1 + \varphi^{\mathrm{T}} P \varphi} = -\frac{\alpha_1^2 - 1}{\alpha_1^2} \cdot \frac{f^2}{1 + \varphi^{\mathrm{T}} P \varphi}. \tag{10}$$

由(10)式便可以轻易得出结论 $V \leqslant V(0)$.因此 $\tilde{\theta}$ 和 P 界.对 $\dot{P}^{-1} = \dfrac{\lambda \varphi \varphi^{\mathrm{T}}}{1 + \varphi^{\mathrm{T}} P \varphi}$ 进行积分得 $P^{-1} = P^{-1}(0) + \int_0^t \dfrac{\lambda \varphi \varphi^{\mathrm{T}}}{1 + \varphi^{\mathrm{T}} P \varphi} \mathrm{d}\tau$.由于上式中等号右边第二项是一半正定矩阵,于是可以得到 $P^{-1} > 0$,所以有 $P > 0$ 成立.同理对(5)式进行积分得 $P(0) = P + \int_0^t \dfrac{\lambda P \varphi \varphi^{\mathrm{T}} P}{1 + \varphi^{\mathrm{T}} P \varphi} \mathrm{d}\tau$.上式等号右边第二项亦是一半正定矩阵,所以 P 不增,即 $P(t) \leqslant P(s) \leqslant P(0)$, $\forall\, t \geqslant s \geqslant 0$,故 P 阵收敛.

对 $\dot{\theta}$ 取范数后做积分可得

$$
\begin{aligned}
\int_0^t \|\dot{\theta}\|_1 \mathrm{d}\tau &= \int_0^t \frac{\lambda \|P\varphi\|_1 |e|}{1+\varphi^{\mathrm{T}}P\varphi}\mathrm{d}\tau \\
&\leqslant \frac{c}{2}\int_0^t \frac{\lambda(\|P\varphi\|_2^2 + e^2)}{1+\varphi^{\mathrm{T}}P\varphi}\mathrm{d}\tau \quad (c\ \text{某常数}) \\
&= \frac{c}{2}\int_0^t \frac{\lambda e_s^2}{1+\varphi^{\mathrm{T}}P\varphi}\mathrm{d}\tau \leqslant \frac{c\alpha_1^2 V(0)}{2(\alpha_1^2 - 1)}.
\end{aligned}
$$

所以 $\dot{\theta}$ 属于 $\mathscr{L}_1^n$ 范数，可见文献[9]，即 $\dot{\theta}\in\mathscr{L}_1^n$. 换句话说当 t 趋于无穷时，θ 的极限存在且有界，所以 θ 收敛，由(10)式容易推出 $\tilde{f}$ 属于 $\mathscr{L}_2$ 范数[9]时. 于是定理得证.

3　非奇异极点配置自适应控制器

控制目的是通过极点配置的方法设计出具有非奇异性的鲁棒自适应控制器. 这里所说的奇异性是指系统估计模型在自适应过程中有可能失去能控性而言[5]. 同时使系统的输出尽可能地跟踪一设定的有界分段连续信号 y_d.

由定理 1 中的性质 2 和参考文献[5]可以得到经修正的辨识参数 $\bar{\theta}=\theta+P\beta$. 式中 $\bar{\theta}=[\bar{b}_1,\bar{b}_2,\cdots,\bar{b}_n,\bar{a}_1,\bar{a}_2,\cdots,\bar{a}_n]^{\mathrm{T}}$，该参数将被用于自适应的控制中. 由 $\bar{\theta}$ 可以得出系统的修正估计模型

$$A(D)y_f = B(D)u_f + e - \beta^{\mathrm{T}}P\varphi. \tag{11}$$

式中 $A(D)=D^n+\bar{a}_1D^{n-1}+\cdots+\bar{a}_{n-1}D+\bar{a}_n$, $B(D)=\bar{b}_1D^{n-1}+\cdots+\bar{b}_{n-1}D+\bar{b}_n$. 极点配置控制器由下式给出

$$u=(F(D)-S(D))u_f - R(D)y_f + y_d. \tag{12}$$

式中 $S(D)=D^n+s_1D^{n-1}+\cdots+s_{n-1}D+s_n$ 和 $R(D)=r_1D^{n-1}+\cdots+r_{n-1}D+r_n$ 是下面的 Diophantine 方程的解

$$A(k)S(k)+B(k)R(k)=C(k)F(k). \tag{13}$$

(13)式中微分算子 D 用无任何数学意义的中间变量 k 代替而只表示多项式间的代数关系. $C(D)=D^n+c_1D^{n-1}+\cdots+c_{n-1}D+c_n$ 是一 Hurwitz 多项式. 它的零点就是系统的闭环极点. 众所周知，(13)式的解存在与否取决于相应的 Sylvester 矩阵的可逆性[10]. 换句话说系统的能控性由该矩阵决定. 根据文献[5]给出的辨识参数修正方法，通过适当地选择收敛有界向量 β 来保证对应于 $\bar{\theta}$ 的 Sylvester 矩阵 $M(\bar{\theta})$ 非奇异，从而保证了控制器参数的收敛性和有界性. 在此基础上方可进行闭环系统的稳定性分析.

4　闭环系统的稳定性分析

综合(11)式和(12)式，可以得出闭环系统的状态空间表达式如下

$$\dot{x}=Ax+B_1(e-\beta^{\mathrm{T}}P\varphi)+B_2y_d. \tag{14}$$

式中 A 是一时变的 $2n\times 2n$ 矩阵[5]. 而状态向量为 $x=[y_f^{(n-1)},\cdots,\dot{y}_f,y_f,u_f^{(n-1)},\cdots,\dot{u}_f,u_f]^{\mathrm{T}}$，控制向量 $B_1=[1,0,\cdots,0]^{\mathrm{T}}$, $B_2=[0,\cdots,0,1,0,\cdots,0]^{\mathrm{T}}$. 从 θ, P 和 β 的收敛性可以得出 $\bar{\theta}$ 收敛这一结论. 又知 A 阵在自适应过程中是时变的，且在任意时刻其特征值均严格为负，与 $C(D)F(D)$ 多项式的零点相对应. 但这不能直接得到闭环系统(14)式的稳定性. 由此仅可知 A 阵将收敛到一定常指数稳定矩阵 A_c，即 $A=A_c+A_v$, $A_v\to 0$, $t\to\infty$, . 于是(14)式可化为

$$\dot{x}=(A_c+A_v)+B_1(e-\beta^{\mathrm{T}}P\varphi)+B_2y_d. \tag{15}$$

由于 A_c 是一指数稳定矩阵，所以存在 $c_0>0$, $\alpha>0$，使得无时变扰动 A_v 影响的齐次方程解的

Cauchy 矩阵 $\Phi(t,\tau)$满足如下不等式

$$\|\Phi(t,\tau)\|_2 \leqslant c_0 e^{-\alpha(t-\tau)}, \quad t > \tau. \tag{16}$$

而方程(15)式的通解为

$$x(t) = \Phi(t,0)x(0) + \int_0^t \Phi(t,\tau)(A_v x + B_1(e - \beta^T P\varphi) + B_2 y_d)\mathrm{d}\tau.$$

对上式两端取2范数,再利用(16)式可得

$$\|x(t)\|_2 \leqslant c_1 + c_2\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}\|A_v(\tau)\|_2\|x(\tau)\|_2 \mathrm{d}\tau + c_2\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}(|e(\tau) - \beta^T(\tau)P(\tau)\varphi(\tau)| + |y_d(\tau)|)\mathrm{d}\tau. \tag{17}$$

由于 $\beta(t)$是一有界向量[5],设 $\beta_m = \max\|\beta(t)\|_2$,则有

$$\begin{aligned}(e(\tau) - \beta^T(\tau)P(\tau)\varphi(\tau))^2 &\leqslant 2(e^2(\tau) + \beta_m^2\varphi^T(\tau)P^2(\tau)\varphi(\tau)) \\ &\leqslant 2\max\{1,\beta_m^2\}(e^2(\tau) + \varphi^T(\tau)P^2(\tau)\varphi(\tau)) \leqslant c_3 e_s^2(\tau).\end{aligned}$$

于是(17)可以写成

$$\begin{aligned}\|x(t)\|_2 &\leqslant c_4 + c_2\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}\|A_v(\tau)\|_2\|x(\tau)\|_2 \mathrm{d}\tau + c_5\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}e_s(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &\leqslant c_4 + c_2\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}\|A_v(\tau)\|_2\|x(\tau)\|_2\mathrm{d}\tau \\ &\quad + c_5\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}f(\tau)\mathrm{d}\tau + \alpha_1 c_5\int_0^t e^{-\tau(t-\tau)}\Delta(\tau)\mathrm{d}\tau.\end{aligned} \tag{18}$$

因为当 $t\to\infty$时,$\|A_v(t)\|_2\to 0$,所以存在某时刻 t_N,当 $t\geqslant t_N$ 时 $\|A_v(t)\|_2 \leqslant \dfrac{\sqrt{c_8'}\alpha_1\sqrt{\mu}}{c_2}$.

对(18)式两端取平方,再利用 Schwartz 不等式可得

$$\begin{aligned}\|x(t)\|_2^2 &\leqslant c_6 + c_7\int_0^t f^2(\tau)\mathrm{d}\tau + \frac{c_8'\mu\alpha_1^2}{\alpha^2}\sup_{0<\tau\leqslant t}\|x(\tau)\|_2^2 + \frac{c_8''\mu\alpha_1^2}{\alpha^2}\sup_{0<\tau\leqslant t}\Delta^2(\tau) \\ &= c_9 + c_7\int_0^t f^2(\tau)\mathrm{d}\tau + \frac{c_8\mu\alpha_1^2}{\alpha^2}\sup_{0<\tau\leqslant t}\|x(\tau)\|_2^2, \quad (c_8 = c_8' + c_8'').\end{aligned}$$

因此如果 $1 - \dfrac{c_8\mu\alpha_1^2}{\alpha^2} \geqslant \varepsilon_r > 0$, ε_r 可以认为是一种稳定性裕度.或当 $\mu \leqslant \bar{\mu} = \dfrac{\alpha^2(1-\varepsilon_r)}{c_8\alpha_1^2}$时,可以得出

$$\begin{aligned}\sup_{0<\tau\leqslant t}\|x(\tau)\|_2^2 &\leqslant c_{10} + c_{11}\int_0^t f^2(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &\leqslant c_{10} + c_{11}\int_0^t \bar{f}^2(\tau)(1 + \varphi^T(\tau)\varphi(\tau))^2\mathrm{d}\tau \\ &= c_{10} + c_{11}\int_0^t \bar{f}(\tau)\mathrm{d}\tau + c_{11}\int_0^t \bar{f}(\tau)\|x(\tau)\|_2^2\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

由于 $\bar{f}\in\mathcal{L}_2$,根据 Gronwall-Bellman 引理,可以得出结论 $x(\tau)$有界.进而由 $\|x(t)\| = \|\varphi(t)\|$ 得到向量 φ 有界.这时我们就可由(12)式知 u 有界.根据(7)式可推知 $y_f^{(n)}$ 有界,所以再由 $y = F(D)y_f$ 便可得到 y 有界.于是得到了闭环系统的大范围的 BIBO 稳定性.我们将上述讨论概括于下述定理中.

定理 2 考虑由(1)式描述的单输入单输出连续时间系统和非奇异自适应极点配置控制器(13)式.在假设条件1和2下,存在一正常数 $\bar{\mu}$,当 $\mu\leqslant\bar{\mu}$ 时闭环系统(14)式全局稳定.闭环

系统中所有信号有界，u 和 y 有界.（c_1-c_{11}均为正常数）.

5 结　论

本文讨论了线性时不变单输入单输出连续时间系统在一类未建模误差和有界扰动干扰下的非奇异自适应极点配置问题.给出具有鲁棒性的可保证闭环系统全局稳定的自适应控制算法和闭环系统稳定的充分条件.该控制器适用于最小相位系统，也适用于非最小相位系统.它对系统的未知参数空间无任何先验信息需求.文中的结论是对文献[5]和[6]中之结果的推广和完善.

参 考 文 献

1 Ortega, R. and Tang, Y.. Robustness of adaptive controllers: a survey. Automatica, 1989, 25(3): 651－677

2 Middleton, R. H., et al.. Design issues in adaptive control. IEEE Trans. Automat. Contr., 1988, AC-33(1): 50－58

3 Morse, A. S., et al.. Applications of hysteresis switching in parameter adaptive control. IEEE Trans. Automat. Contr., 1992, AC-37(9): 1343－1354

4 Lozano, R. and Brogliato, B.. Adaptive control of a simple nonlinear system without a-priori information on the plant parameters. IEEE Trans. Automat. Contr., 1992, AC-37(1): 30－37

5 Lozano, R. and Zhao, X. H.. Adaptive pole placement without excitation probing signals. IEEE Trans. Automat. Contr., 1994, AC-39(1): 47－58

6 Zhao, X. H. and Lozano, R.. Adaptive pole placement for continuous-time systems in the pressence of bounded disturbances. Proceedings of 12th IFAC World Congr. on Automatic Control, 1993, I: 205－210

7 Desoer, C. A. and Vidyasagar, M.. Feedback system: input-output properties. Academic Press, 1975

8 Miller, R. K. and Michel, A. N.. Ordinary differential equations. Academic Press, 1982

9 Sastry, S. and Bodson, M.. Adaptive control stability, convergence and robustness. Prentice Hall, Enlewood Cliffs, New Jersey, 1989

10 Goodwin, G. C. and Sin, K. S.. Adaptive filtering, prediction and control. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1984

Robust Adaptive Control for Continuous Time Systems

ZHAO Xiaohui

(Department of Telecommunication Engineering, Changchun Institute of Posts and Telecommunications·Changchun, 130012, PRC)

FENG Chunbo

(Research Institute of Automation, Southeast University·Nanjing, 210096, PRC)

Abstract: This paper proposes a robust adaptive pole placement control scheme for continuous time systems with bounded disturbances and unmodeled dynamics. The systems may possible be nonminimun phase and unstable. It is shown that for the disturbances, a global BIBO stability is guaranteed without either introducing persistent excitantion signals or assuming any a-priori knowledge on the plant parameters and the scheme has no any singularities.

Key words: unmodeled dynamiocs; bounded disturbances; robustness; global stability

本文作者简介

赵晓晖　1957 年生.分别于 1982 年和 1989 年在吉林工业大学获学士学位和硕士学位，1993 年获法国贡比涅科技大学计算机与自动控制系博士学位，1996 年结束在东南大学的博士后研究工作.主要研究兴趣是自适应控制理论，信号处理.

冯纯伯　见本刊 1997 年第 2 期第 183 页.