第 14 卷第 4 期
1997 年 8 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 14, No. 4
Aug., 1997

多变量不确定性系统的变结构逻辑极值控制律*

周　军　周凤岐

(西北工业大学航天工程学院・西安,710072)

摘要：本文针对线性多变量不确定性系统，提出了变结构逻辑极值控制律形式及其设计方法. 该控制律完全基于被控对象的标称模型和不确定性因素上下界，建立起了不确定性因素变化范围与控制律参数逻辑之间具有一般性的关系. 无论不确定性因素是否满足匹配条件，均能保证变结构控制系统的滑动模态存在.

关键词：变结构控制；滑动模态；不确定性；多变量控制

1　引　言

从理论上讲，满足滑动模态存在条件[1]的变结构控制律有无数种，但得到公认的却较少. Dorlings 和 Zinober[2]总结了最典型的四种变结构控制律形式；Utkin[3]提出了递阶控制算法，至今仍是多变量变结构控制律设计中最重要和系统的方法；高为炳[4]则在此基础上对递阶控制律进行了细致的讨论和完善. 这些成果十分有意义，已得到了广泛应用.

然而，以上各种变结构控制律还存在着一些困难：第一，当被控对象存在匹配和失配输入不确定性因素时，控制律可能形成递归函数而难以确定；第二，控制律参数逻辑与各种不确定性因素的变化范围之间没有建立起直接的关系，给高阶多变量对象或不确定性复杂多变情况下的变结构控制律的确定带来了很大的不便和困难. 为此，本文将针对具有输入等各种不确定性因素的多变量线性系统，提出变结构逻辑极值控制律.

2　不确定性系统的描述

考虑一般形式的多变量线性不确定性系统：

$$\dot{X}(t) = [A(t) + \Delta A(\sigma,t)]X(t) + [B(t) + \Delta B(v,t)]U(t) + D(t)\omega. \tag{1}$$

其中 $X \in \mathbb{R}^n, U \in \psi \subseteq \mathbb{R}^m; \sigma \in \Sigma \subseteq \mathbb{R}^p$ 和 $v \in \Gamma \subseteq \mathbb{R}^q$ 分别为引起系统参数和输入不确定性变化的因素，$\omega \in \Omega \in \mathbb{R}^l$ 为不确定性扰动向量；$\Delta A(\sigma,t)$、$\Delta B(v,t)$ 中各元素分别描述 $A(t)$，$B(t)$ 相应元素的标称值与真值之间的不确定性差异. $D(t) = \{d_{ij}(t)\}_{n\times l}$.

考虑到工程中不确定性因素最简单易获得的信息是它们的上下界，故假设：

Ⅰ)　$\omega = [\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_l]^{\mathrm{T}}, \quad \omega_{i\min} \leqslant \omega_i \leqslant \omega_{i\max};$　(2)

Ⅱ)　$\Delta A(\cdot) = \{\Delta a_{ij}\}_{n\times n}, \quad \Delta a_{ij\min} \leqslant \Delta a_{ij} \leqslant \Delta a_{ij\max};$　(3)

Ⅲ)　$\Delta B(\cdot) = \{\Delta b_{ij}\}_{n\times m}, \quad \Delta b_{ij\min} \leqslant \Delta b_{ij} \leqslant \Delta b_{ij\max};$

式中 $\omega_{i\min}, \omega_{i\max}, \Delta a_{ij\min}, \Delta a_{ij\max}, \Delta b_{ij\min}$ 和 $\Delta b_{ij\max}$ 为已知常数.

3　变结构逻辑极值控制律

针对 n 阶不确定性被控对象(1)定义变结构控制系统的 m 个滑动超平面：

$$S_i = G_i X = \sum_{j=1}^{n} g_{ij} x_j = 0,$$

---

* 高等院校博士学科点专项基金和航天科学基金资助项目.

本文于 1994 年 10 月 24 日收到. 1996 年 9 月 4 日收到修改稿.

所以 $$S = GX = [s_1 \;\; s_2 \;\; \cdots \;\; s_m]^{\mathrm{T}} = \{g_{ij}\}_{m\times n}X = 0. \tag{5}$$

这里滑动模态 $S=0$ 的设计必须保证 $\det[GB(t)] \neq 0$,并且等价系统一致渐近稳定或一致最终有界稳定.这是变结构控制系统的又一设计问题,详细可见文献[2,5].本章直接在此基础上进行新的控制律设计方法的研究.

对于任意 $\sigma \in \Sigma, \upsilon \in \Gamma, \omega \in \Omega$ 引起的系统不确定性因素,要保证滑动模态存在,控制律 $U(t)$ 就必须满足滑动模态存在条件

$$S^{\mathrm{T}}(X)\dot{S}(X) < 0. \tag{6}$$

考虑到输入不确定性因素 $\Delta B(\cdot)$ 与参数和扰动等其它不确定性因素并存,令

$$U(t) = \bar{U}(t) + \tilde{U}(t) = [\bar{u}_1 \;\; \bar{u}_2 \;\; \cdots \;\; \bar{u}_m]^{\mathrm{T}} + [\tilde{u}_1 \;\; \tilde{u}_2 \;\; \cdots \;\; \tilde{u}_m]^{\mathrm{T}} \tag{7}$$

式中 $\bar{U}$ 用于克服参数和扰动不确定性影响,$\tilde{U}$ 则克服输入不确定性影响.相应地,可令

$$\dot{S} = \dot{S}_{\sigma,\omega} + \dot{S}_{\upsilon} = [\dot{s}_{\sigma,\omega 1} \;\; \dot{s}_{\sigma,\omega 2} \;\; \cdots \;\; \dot{s}_{\sigma,\omega m}]^{\mathrm{T}} + [\dot{s}_{\upsilon 1} \;\; \dot{s}_{\upsilon 2} \;\; \cdots \;\; \dot{s}_{\upsilon m}]^{\mathrm{T}}. \tag{8}$$

其中 $$\dot{S}_{\sigma,\omega} = G[A(t) + \Delta A(\sigma,t)]X(t) + GD(t)\omega + GB(t)\bar{U}(t), \tag{9}$$

$$\dot{S}_{\upsilon} = G\Delta B(\upsilon,t)U(t) + GB(t)\tilde{U}(t). \tag{10}$$

将式(8)代入(6),则式(6)成立的充分条件为

$$S^{\mathrm{T}}(X)\dot{S}_{\sigma,\omega}(X) < 0, \tag{11}$$

$$S^{\mathrm{T}}(X)\dot{S}_{\upsilon}(X) < 0. \tag{12}$$

这样我们便将设计变结构控制律 U 保证式(6)成立的问题转化为设计 $\bar{U}$ 和 $\tilde{U}$ 分别保证式(11)和(12)成立的两个子问题.

3.1 $\bar{U}$ 的设计

引入逻辑极值函数 $$\varphi(f,R) = \begin{cases} f_{\min}, & R < 0, \\ f_{\max}, & R > 0. \end{cases}$$

定义 $$\inf_{\sigma\in\Sigma}(s_i,A) \leqslant G_i[A(t) + \Delta A(\sigma,t)]X(t) \leqslant \sup_{\sigma\in\Sigma}(s_i,A),$$

$$\inf_{\omega\in\Omega}(s_i,D) \leqslant G_iD(t)\omega \leqslant \sup_{\omega\in\Omega}(s_i,D).$$

则由不确定性因素的极值假设条件Ⅰ)和Ⅱ)可得:

$$\inf_{\sigma\in\Sigma}(s_i,A) = G_iA(t)X(t) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{ij}x_k \cdot \varphi(\Delta a_{jk}, -g_{ij}x_k);$$

$$\sup_{\sigma\in\Sigma}(s_i,A) = G_iA(t)X(t) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{ij}x_k \cdot \varphi(\Delta a_{jk}, g_{ij}x_k);$$

$$\inf_{\omega\in\Omega}(s_i,D) = \sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{n} g_{ij}d_{jk} \cdot \varphi(\omega_k, -\sum_{j=1}^{n} g_{ij}d_{jk});$$

$$\sup_{\omega\in\Omega}(s_i,D) = \sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{n} g_{ij}d_{jk} \cdot \varphi(\omega_k, \sum_{j=1}^{n} g_{ij}d_{jk}).$$

据此,就可以设计出满足式(11)的逻辑极值形式的变结构控制律 $\bar{U}(t)$:

$$\bar{U}(t) = -[GB(t)]^{-1}R(t), \quad R(t) = [r_1(t) \;\; r_2(t) \;\; \cdots \;\; r_m(t)]^{\mathrm{T}}, \tag{13}$$

$$r_i(t) = \begin{cases} \sup\limits_{\sigma\in\Sigma}(s_i,A) + \sup\limits_{\omega\subset\Omega}(s_i,D), & s_i \geqslant 0 \\ \inf\limits_{\sigma\in\Sigma}(s_i,A) + \inf\limits_{\omega\in\Omega}(s_i,D), & s_i < 0 \end{cases}, \quad i = 1,2,\cdots,m.$$

事实上,将式(13)代入(9)即可证明式(11)成立.特别指出的是,当 $\Delta B(\cdot) = 0$ 即被控对象(1)无输入不确定性因素时,$\tilde{U} = 0$ 即能满足滑动模态存在条件(6),$\bar{U}$ 等价于 U.可见式(13)给出的控制律具有一般性.

3.2 $\tilde{U}$ 的设计($\Delta B(v,t) \neq 0$)

由于$\Delta B(\cdot)$是$B(\cdot)$的不确定性因素,所以输入$U(t)$通过$\Delta B(\cdot)$对系统的影响为干扰,不能超过其通过$B(\cdot)$对系统的作用,否则控制系统难以稳定.故限定:

$$\|(G\Delta B)(GB)^{-1}\|_\infty \leqslant \|G\Delta B\|_\infty \cdot \|(GB)^{-1}\|_\infty < 1. \tag{14}$$

设$\tilde{U}(t)$具有与$\bar{U}(t)$相似的形式,即

$$\tilde{U} = -[GB(t)]^{-1}K\,\mathrm{sgn}(S) = -KT = -K[t_1\ t_2\ \cdots\ t_m]^{\mathrm{T}}. \tag{15}$$

其中$K=\mathrm{diag}(k_1,k_2,\cdots,k_m)$,$\mathrm{sgn}(S)=[\mathrm{sgn}(s_1)\ \mathrm{sgn}(s_2)\ \cdots\ \mathrm{sgn}(s_m)]^{\mathrm{T}}$. $k_i \geqslant 0$为待定控制参数;当$\Delta B(v,t)=0$时,取$k_i=0$.故

$$\dot{S}_v = [G\Delta B(v,t)]\bar{U} - [G\Delta B(v,t)]KT - K\,\mathrm{sgn}(S),$$

即

$$\dot{s}_{vi} = \alpha_i - k_i[\beta_i + \mathrm{sgn}(s_i)],\quad i=1,2,\cdots,m.$$

式中

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} g_{il}\Delta b_{lj}\bar{u}_j,\quad \beta_i = \sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} g_{il}\Delta b_{lj}t_j.$$

若令

$$\inf_{v\in\Gamma}(\alpha_i) \leqslant \alpha_i \leqslant \sup_{v\in\Gamma}(\alpha_i),\quad \inf_{v\in\Gamma}(\beta_i) \leqslant \beta_i \leqslant \sup_{v\in\Gamma}(\beta_i),$$

则有

$$\inf_{v\in\Gamma}(\alpha_i) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} g_{il}\cdot\varphi(\Delta b_{lj}, -g_{il}\bar{u}_j)\cdot u_j;$$

$$\sup_{v\in\Gamma}(\alpha_i) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} g_{il}\cdot\varphi(\Delta b_{lj}, g_{il}\bar{u}_j)\cdot \bar{u}_j;$$

$$\inf_{v\in\Gamma}(\beta_i) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} g_{il}\cdot\varphi(\Delta b_{lj}, -g_{il}t_j)\cdot t_j;$$

$$\sup_{v\in\Gamma}(\beta_i) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} g_{il}\cdot\varphi(\Delta b_{lj}, g_{il}t_j)\cdot t_j.$$

容易推证,由式(14)得$-1<\inf_{v\in\Gamma}(\beta_i) \leqslant \beta_i \leqslant \sup_{v\in\Gamma}(\beta_i) < 1$,并且满足式(12)的逻辑极值形式控制律$\tilde{U}$为

$$\tilde{U} = -[GB(t)]^{-1}\cdot\mathrm{diag}(k_1,k_2,\cdots,k_m)\mathrm{sgn}(S); \tag{16}$$

$$k_i = \begin{cases} \sup_{v\in\Gamma}(\alpha_i)/[1+\inf_{v\in\Gamma}(\beta_i)], & s_i \geqslant 0 \text{ 且} \sup_{v\in\Gamma}(\alpha_i) \geqslant 0; \\ \sup_{v\in\Gamma}(\alpha_i)/[1+\sup_{v\in\Gamma}(\beta_i)], & s_i \geqslant 0 \text{ 且} \sup_{v\in\Gamma}(\alpha_i) < 0; \\ \inf_{v\in\Gamma}(\alpha_i)/[\inf_{v\in\Gamma}(\beta_i)-1], & s_i < 0 \text{ 且} \inf_{v\in\Gamma}(\alpha_i) \geqslant 0; \\ \inf_{v\in\Gamma}(\alpha_i)/[\sup_{v\in\Gamma}(\beta_i)-1], & s_i < 0 \text{ 且} \inf_{v\in\Gamma}(\alpha_i) < 0; \end{cases}\quad i=1,2,\cdots,m.$$

3.3 $U(t)$ 及其修正

综合式(13)和(16),并根据式(7)即得完整的变结构逻辑极值控制律:

$$U(t) = -[GB(t)]^{-1}[R(t) + \mathrm{diag}(k_1,k_2,\cdots,k_m)\mathrm{sgn}(S)]. \tag{17}$$

为了消除变结构控制系统的颤振[6],本文给出式(17)的以下平滑修正形式:

$$U(t) = -[(GB(t)]^{-1}[\pi + (\Delta\pi + K)\mathrm{sat}(S/\delta)], \tag{18}$$

$$\mathrm{sat}\left(\frac{S}{\delta}\right) = [\mathrm{sat}(s_1/\delta_1)\ \ \mathrm{sat}(s_2/\delta_2)\ \ \cdots\ \ \mathrm{sat}(s_m/\delta_m)]^{\mathrm{T}}.$$

式中

$$\pi = [\pi_1\ \ \pi_2\ \ \cdots\ \ \pi_m]^{\mathrm{T}},\quad \Delta\pi = \mathrm{diag}(\Delta\pi_1,\Delta\pi_2,\cdots,\Delta\pi_m),$$

$$2\pi_i = \sup_{\sigma\in\Sigma}(s_i,A) + \sup_{\omega\in\Omega}(s_i,D) + \inf_{\sigma\in\Sigma}(s_i,A) + \inf_{\omega\in\Omega}(s_i,D),$$

$$2\Delta\pi_i = \sup_{\sigma\in\Sigma}(s_i,A) + \sup_{\omega\in\Omega}(s_i,D) - \inf_{\sigma\in\Sigma}(s_i,A) - \inf_{\omega\in\Omega}(s_i,D),$$

而 $\delta_i > 0$ 为变结构控制系统的消颤因子.

4 结 论

1）该算法在多变量被控对象同时存在参数、输入和扰动等不确定性因素的情况下，均能保证滑动模态存在. 有效地避免了输入不确定性因素存在时控制律出现递归的问题.

2）该算法仅依赖于被控对象的标称参数和不确定性因素的上下界，以逻辑判断的形式给出，因此在工程上容易实现，减少了因辨识和估计带来的计算量和结构复杂性.

3）该算法在其参数逻辑与不确定性因素的变化范围之间建立起了直接的计算关系. 这给多变量高阶被控对象的变结构控制律设计带来了很大的方便.

参 考 文 献

1 Utkin, V. I.. Variable structure systems with sliding modes. IEEE Transactions on Automatic Control, 1977, 22(2): 212-222

2 Dorlings, C. M. & Zinober, A. S. I.. Two approaches to happerplane design in multivariable variable structure control systems. Int. J. Control, 1986, 44(1):65-82

3 Utkin V. I.. Sliding modes and their application in variable structure systems. Moscow. MIR Publishers, 1978

4 高为炳. 变结构控制理论基础. 北京：中国科学技术出版社，1990

5 Vidiesigner M. 著，徐德民译，非线性系统分析. 北京：国防工业出版社，1983

6 Burton, J. A. and Zinober, A. S. I.. Continuous approximation of variable structure control. Int. J. System Sci., 1986, 17(6):875-855

A New Variable Structure Control Law for Multivariable Uncertain Plants

ZHOU Jun and ZHOU Fengqi

(College of Astronautics, Northwestern Polytechnical University · Xi'an, 710072, PRC)

Abstract: In this paper, a new variable structure control law that is called logic and extreme control law is proposed for multivariable linear plants with matched or mismatched uncertainties. Its designing method, which is totally based on the plant nominal models and the uncertainties' extreme values, is also studied. Meanwhile, some direct and general relations between the uncertainties' variation ranges and the cotrol laws' parameters are established. No matter what concrete forms the uncertainties have, the control law designed here ensures that the sliding mode exists. The control law got in this paper is suited to many areas, and is easy to realize in engineering.

Key workds: variable structure control; multivariable control system; uncertainty

本文作者简介

周 军 见本刊 1997 年第 2 期第 286 页.

周凤岐 风本刊 1997 年第 2 期第 286 页.