第 14 卷第 4 期
1997 年 8 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 14, No. 4
Aug., 1997

逆 Nyquist 阵列设计中的小增益递推原理与实现

毛维杰　孙优贤　冯冬芹
(浙江大学工业控制技术研究所·杭州, 310027)

摘要：本文通过在逆 Nyquist 阵列设计中引入小增益递推原理，提出了一种改进的 INA(RINA)设计方法，该方法既保持了传统的 INA(RINA)设计方法的优点，又解决了当系统的传递函数矩阵的对角优势(鲁棒对角优势)遭到破坏时，系统的稳定性(鲁棒稳定性)问题.

关键词：对角优势；鲁棒性；INA 设计方法

1 引　言

Rosenbrock 的逆 Nyquist 阵列(INA)设计方法，是现代多变量频率域设计方法中提出最早也是最为重要的一种方法. 根据 INA 设计方法的思想，只要对控制对象进行预先补偿，使其传递函数矩阵成为对角优势的，即可把多变量系统的设计问题分解为一系列单变量系统的设计[1]. 但是，作为 INA 设计方法的核心，即对角优势和稳定性的联合判据，只是系统稳定的充分条件，并不是必要条件，按这样设计的增益矩阵往往会偏于保守. 特别是当系统存在模型不确定性时，按照鲁棒的逆 Nyquist 阵列(RINA)设计方法，必须保证其传递函数矩阵的鲁棒对角优势[2~4]，使系统设计更趋于保守. 事实上，我们设计的目的是使系统稳定(鲁棒稳定)，对角优势并不是目的，仅是为了设计简单的控制器的一种手段. 当然，利用 Ostrowski 定理可以对 INA 和 RINA 设计中的增益矩阵进行改进，但也只能是在保证其它回路的对角优势不遭破坏的情况下，对某一回路的增益值进行改进，因此并没有从实质上解决，当系统传递函数矩阵的对角优势(鲁棒对角优势)遭到破坏时，系统的稳定性(鲁棒稳定性)问题[5].

本文利用 BIBO 稳定性理论中的小增益定理[6]，通过在 INA(RINA)设计方法中引入小增益递推技术，提出了一种能够解决上述问题的设计方法，称之为改进的 INA(RINA)设计方法.

2 基本思想

首先，引入小增益定理.

定理 1　考虑如图 1 所示反馈系统

$$u_1 = e_1 + A_2 e_2, \tag{2.1}$$

$$u_2 = e_2 - A_1 e_1. \tag{2.2}$$

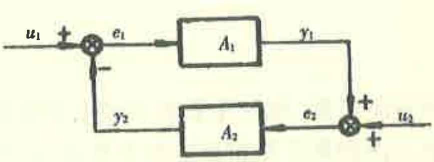

图 1　反馈系统

记 K_1, K_2 为 A_1, A_2 的算子增益，如果满足

$$K_1 K_2 < 1, \tag{2.3}$$

则系统是 BIBO 稳定的.

小增益定理虽然只是 BIBO 稳定性判据，但对于可控和可观测的线性系统，其内部稳定性和外部稳定性是等价的. 当然，小增益定理所给出的稳定性判据只是系统稳定的充分条件，往往会比较保守. 但我们可以通过回路变换的办法来改善小增益定理，并有如下的小增益递推原理.

本文于 1995 年 3 月 31 日收到. 1996 年 6 月 17 日收到修改稿.

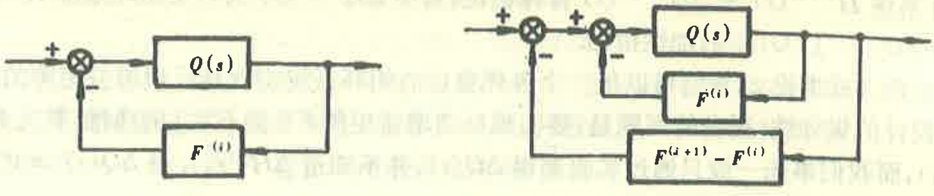

图 2　小增益递推结构

定理 2　考虑如图 2(a) 所示的反馈系统，其中 $Q(s)\in\mathbb{C}^{n\times n}$，$F^{(i)}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 为其反馈增益矩阵，若闭环系统 $H^{(i)}(s)=[I+Q(s)F^{(i)}]^{-1}Q(s)$ 是稳定的，则存在 $F^{(i+1)}\in\mathbb{R}^{n\times n}$，当

$$\|F^{(i+1)}-F^{(i)}\|_\infty<\frac{1}{\|H^{(i)}(s)\|_\infty}\tag{2.4}$$

时，闭环系统 $H^{(i+1)}(s)=[I+Q(s)F^{(i+1)}]^{-1}Q(s)$ 稳定.

比较图 2(a) 与图 2(b) 所示的系统，显然其结构是完全等价的，图 2(b) 只是把图 2(a) 的反馈增益矩阵递推了一步，即以 $F^{(i+1)}$ 代替了图 2(a) 中的 $F^{(i)}$，故取名为小增益递推原理. 利用小增益递推原理，显然有利于减少小增益定理所给出的稳定性判据的保守性.

由于 $\|\cdot\|_\infty$ 的计算不是十分方便，利用不等式 $\|H(s)\|_\infty\leqslant n\sup_\omega\max_{i,j}|h_{ij}(j\omega)|$ 可对定理 2 的稳定性判据作一定的简化，即有如下推论：

推论 1　考虑如图 2(a) 所示的反馈系统，其中 $Q(s)\in\mathbb{C}^{n\times n}$，$F^{(i)}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 为其反馈增益矩阵，若闭环系统 $H^{(i)}(s)=[I+Q(s)F^{(i)}]^{-1}Q(s)$ 是稳定的，则存在 $F^{(i+1)}\in\mathbb{R}^{n\times n}$，当

$$\|F^{(i+1)}-F^{(i)}\|_\infty<\frac{1}{n\sup_\omega\max_{i,j}|h_{ij}^{(i)}(j\omega)|}\tag{2.5}$$

时，闭环系统 $H^{(i+1)}(s)=[I+Q(s)F^{(i+1)}]^{-1}Q(s)$ 稳定.

注　对于实际过程，$\|H(s)\|_\infty\leqslant n\sup_\omega\max_{i,j}|h_{ij}(j\omega)|$ 中的等号通常不成立，因此(2.5)式通常可以取到等号.

考虑到系统的模型不确定性，类似地有鲁棒的小增益递推原理.

定理 3　考虑如图 2(a) 所示的反馈系统，其中 $Q(s)\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 存在加性摄动 $\Delta Q(s)\in\mathbb{C}^{n\times n}$，且 $\Delta Q(s)\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 是稳定的，$F^{(i)}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 为其反馈增益矩阵，若闭环系统 $H^{(i)}(s)+\Delta H^{(i)}(s)$ 是鲁棒稳定的，其中 $\Delta H^{(i)}(s)$ 为名义闭环系统 $H^{(i)}(s)=[I+Q(s)F^{(i)}]^{-1}Q(s)$ 的加性摄动，则存在 $F^{(i+1)}\in\mathbb{R}^{n\times n}$，当

$$\|F^{(i+1)}-F^{(i)}\|_\infty<\frac{1}{\|H^{(i)}(s)\|_\infty+\|\Delta H^{(i)}(s)\|_\infty}\tag{2.6}$$

时，闭环系统 $H^{(i+1)}(s)+\Delta H^{(i+1)}(s)$ 鲁棒稳定，其中 $\Delta H^{(i+1)}(s)$ 为名义闭环系统 $H^{(i+1)}(s)=[I+Q(s)F^{(i+1)}]^{-1}Q(s)$ 的加性摄动.

类似于定理 2，定理 3 也有如下推论：

推论 2　考虑如图 2(a) 所示的反馈系统，其中 $Q(s)\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 存在加性摄动 $\Delta Q(s)\in\mathbb{C}^{n\times n}$，且 $\Delta Q(s)\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 是稳定的，$F^{(i)}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 为其反馈增益矩阵，若闭环系统 $H^{(i)}(s)+\Delta H^{(i)}(s)$ 是鲁棒稳定的，其中 $\Delta H^{(i)}(s)$ 为名义闭环系统 $H^{(i)}(s)=[I+Q(s)F^{(i)}]^{-1}Q(s)$ 的加性摄动，则存在 $F^{(i+1)}\in\mathbb{R}^{n\times n}$，当

$$\|F^{(i+1)}-F^{(i)}\|_\infty<\frac{1}{n\sup_\omega\max_{i,j}|h_{ij}^{(i)}(j\omega)|+\|\Delta H^{(i)}(s)\|_\infty}\tag{2.7}$$

时，闭环系统 $H^{(i+1)}(s)+\Delta H^{(i+1)}(s)$ 鲁棒稳定，其中 $\Delta H^{(i+1)}(s)$ 为名义闭环系统 $H^{(i+1)}(s)=[I+Q(s)F^{(i+1)}]^{-1}Q(s)$ 的加性摄动.

由定理3或推论2，显然可以从一个鲁棒稳定的闭环系统实现其反馈增益矩阵的递推，从而减少设计的保守性. 现在的问题是，要实现反馈增益矩阵 $F^{(i)}$ 到 $F^{(i+1)}$ 的递推，首先必须知道 $\Delta H^{(i)}(s)$，而我们事先一般只通过实验测得 $\Delta Q(s)$，并不知道 $\Delta H^{(i)}(s)$. 当 $\Delta Q(s)\neq 0$ 时，显然有

$$\Delta H^{(i)}(s)=[I+(Q(s)+\Delta Q(s))F^{(i+1)}]^{-1}[Q(s)+\Delta Q(s)]-[I+Q(s)F^{(i)}]^{-1}Q(s). \tag{2.8}$$

3 算法与实例

逆 Nyquist 阵列方法设计出的控制系统的结构一般如图3所示. 图中 $G(s)\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 为对象传递函数阵，$K_p(s)\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 为预补偿阵，$F\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 为反馈增益阵，$K_c(s)\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 为动态补偿器矩阵，F 与 $K_c(s)$ 都是对角阵. 为分析方便起见，认为 $K_c(s)$ 各个动态补偿器的静态比例系数均为1，即把所有比例系数均归入 F 内，所以 F 表示了回路的增益要求.

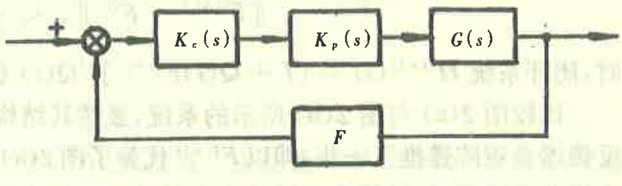

图3 闭环系统控制结构

利用小增益递推原理，我们就可以对 INA 设计方法中回路增益的调整作出改进，即可用小增益递推原理代替 Ostrowski 定理. 对于改进后的 INA 设计方法，其基本步骤为：

1）设计 $K_p(s)$，使 $\hat{K}_p(s)\hat{G}(s)$ 或 $G(s)K_p(s)$ 为对角优势矩阵. 关于对角优势的实现，可用试探法或伪对角方法等；

2）作出已对角优势化矩阵的对角元素的 Gershgorin 带，并按照 INA 稳定性判据，初步选定反馈增益矩阵 F，尽可能满足精度要求；

3）针对每个回路设计动态补偿器 $K_c(s)$，以满足动态品质要求. 设计方法与单变量系统的设计方法相同；

4）必要时，可对某些回路的增益用小增益递推原理加以改进，以提高某些回路的静态精度和减少设计的保守性.

若对象传递函数阵 $G(s)$ 存在模型摄动 $\Delta G(s)\in\mathbb{C}^{n\times n}$，则只需用鲁棒对角优势、鲁棒 Gershgorin 带、鲁棒稳定性判据和鲁棒的小增益递推原理代替以上步骤中相应的概念，INA 设计方法即成为 RINA 设计方法. 当然，在 RINA 设计方法中，运用鲁棒的小增益递推原理时，由于要从 $\Delta Q(s)$ 确定 $\Delta H^{(i)}(s)$，因此增加了计算的复杂性.

考虑到本改进方法与传统的 INA 设计方法的一致性，故对设计步骤中的1）～3）不再赘述，可参阅有关 INA 设计方法的文献，这里仅举一例以说明步骤4）.

某系统的前向传递函数阵的逆阵为

$$\hat{Q}(s)=\begin{bmatrix}2s^3+6s^2+6s+2 & 2s+0.25\\ 1.5s+0.5 & 4s^4+10s^3+14s^2+10s+4\end{bmatrix},$$

设 $F=\mathrm{diag}(f_1,f_2)$ 为其反馈增益矩阵，则由 INA 方法可知，当

$$0\leqslant f_1\leqslant 9.2,\quad 0\leqslant f_2\leqslant 4.0$$

时，该系统既是对角优势，又是稳定的[5,7]. 当 $f_1=6$ 时，由 Ostrowski 带可确定 $0\leqslant f_2\leqslant 5.2$ 时闭环系统稳定；当 $f_2=3$ 时，由 Ostrowski 带可确定 $0\leqslant f_1\leqslant 15.5$ 时闭环系统稳定[7].

利用上述算法，对 f_1 和 f_2 进行小增益递推可得，当

$$0 \leqslant f_1 \leqslant 10.750,\quad 0 \leqslant f_2 \leqslant 5.550$$

时，系统均能保持稳定.此结果显然不可能由 Ostrowski 带得到，本文方法的优点正在此处，即可对所有回路的增益值进行递推改进，而 Ostrowski 只能对某一回路进行改进.

若选定 $f_2 = 3.0$，只对 f_1 进行小增益递推可得，当

$$0 \leqslant f_1 \leqslant 16.279$$

时，系统均能保持稳定.

若选定 $f_1 = 6$，只对 f_2 进行小增益递推可得，当

$$0 \leqslant f_2 \leqslant 5.550$$

时，系统均能保持稳定.

显然，由本文确定的增益值比 Ostrowski 带确定的结果稍有改进.同时也可看出，由 INA 设计方法确定的 $F = \mathrm{diag}(f_1, f_2)$，其中 f_1 的稳定裕度要比 f_2 大得多.

4 结　语

本文通过在逆 Nyquist 阵列设计方法中引入小增益递推原理，提出了一种改进的 INA (RINA)设计方法.该方法巧妙地利用了 BIBO 稳定性理论中的小增益定理，不但克服了小增益定理在稳定性判据上的保守性，还完全保持了传统的 INA(RINA)设计方法的优点，并从实质上解决了 INA(RINA)设计方法所面临的难题，即当系统传递函数矩阵的对角优势(鲁棒对角优势)遭到破坏时，系统的稳定性(鲁棒稳定性)问题.

当然，本文所提出的改进的 INA(RINA)设计方法，在其实现上，还有许多有待于进一步完善的地方.但我们相信，本文的设计思想将会使逆 Nyquist 阵列这一传统的设计方法获得新的活力.

参 考 文 献

1 Rosenbrock, H. H.. Computer-aided control system design. N. Y. Academic Press, London, 1974

2 Arkun, Y., Manousiouthakis, B. and Putz, P.. Robust Nyquist array methodology: a new theoretical framework for analysis and design of robust multivariable feedback systems. Int. J. Control, 1984, 40(4): 603—629

3 Yeung, L. F. and Bryand, G. F.. Robust stability of diagonally dominant systems. IEE Proc. D, 1984, 131(6): 253—260

4 庞国仲，陈振跃.鲁棒稳定性和鲁棒对角优势的关系.自动化学报，1992，18(3)：273—281

5 程鹏.多变量线性控制系统.北京：北京航空航天大学出版社，1990

6 Zames, G.. Functional analysis applied to nonlinear feedback systems. IEEE Trans. Circuits and Systems, 1963, CT-10(9): 392—404

7 古孝鸿，周立峰.线性多变量系统频域法.上海：上海交通大学出版社，1990

8 Doyle, J. C. and Stein, G.. Multivariable feedback design: concepts for a classical/modern system. IEEE Trans. Automat. Contr., 1981, AC-26(1): 4—16

9 Qi, L.. Some simple estimates for singular values of a matrix. Linear Algebra Appl., 1984, 56(1): 105—119

Principle and Related Realization of Small Gain Recursion in the Inverse Nyquist Array Methodology

MAO Weijie, SUN Youxian and FENG Dongqin

(Institute of Industrial Process Control, Zhejiang University · Hangzhou, 310027, PRC)

Abstract: By introducing the principle of small gain recursion in the inverse Nyquist array methodology, the authors present a revised INA(RINA) design method in this paper. While maintaining the merits of classical INA(RINA) methodology, this method solves ultimately the stability (robust stability) problem when the diagonal dominance (robust diagonal dominance) of the system transfer matrix is violated. An example is given to demonstrate the effectiveness of the proposed method.

Key words: diagonal dominance; robustness; INA design method

本文作者简介

毛维杰 1969 年生. 分别于 1991 年和 1994 年在浙江大学获得学士和硕士学位. 现在浙江大学工业控制技术研究所攻读博士学位. 主要研究方向为电气传动与控制、时滞系统控制、解耦控制、鲁棒控制等理论与应用.

孙优贤 见本刊 97 年第 1 期第 41 页.

冯冬芹 1968 年生. 分别于 1991 年和 1994 年在浙江大学获得学士和硕士学位. 现在浙江大学工业控制技术研究所攻读博士学位. 主要研究方向为造纸过程的建模与控制、鲁棒控制理论与应用等.