

基于奇异值分解的固定区间平滑新方法*

张友民 焦凌云 陈洪亮 戴冠中

(西北工业大学自动控制系统·西安, 710072)

摘要: 本文提出一种基于奇异值分解(SVD)的固定区间平滑新方法, 该方法基于 Rauch-Tung-Striebel 固定区间平滑方法, 利用奇异值分解作为计算工具, 将原算法中协方差阵进行奇异值分解, 不仅具有很好的数值稳定性和鲁棒性, 而且避免了矩阵的求逆, 此外, 采用 SVD 分解, 具有明显的物理意义, 仿真计算结果证明了本文方法的有效性和优越性。

关键词: 奇异值分解; 卡尔曼滤波; 平滑

1 引言

固定区间平滑方法在国内外得到了广泛研究, 但基本上都是基于常规卡尔曼滤波算法, 利用滤波结果计算平滑值和平滑协方差阵。由于滤波算法中协方差阵 $P(t)$ 的更新方程对舍入误差很敏感, 会导致 $P(t)$ 失去正定性和对称性, 从而出现递推算法的数值稳定性问题^[1~3]。为了解决此问题, 人们提出了平方根滤波和 U-D 分解滤波及平滑方法, 用协方差阵的平方根代替方差阵的迭代计算, 虽然这种算法避免了协方差阵出现负定和方差阵求逆问题, 但它仍需要计算状态转移阵的逆, 不能用于具有奇异状态转移阵的系统。而奇异值分解(SVD)是迄今数值代数中数值稳定性和精度最好的一种矩阵分解形式, 并且易于在向量型并行计算机上实现, 因此, 近年来基于 SVD 的滤波、辨识与控制问题的研究受到学者们的极大重视^[4~5]。但基于 SVD 的固定区间平滑方法还未曾有人解决, 基于此, 本文利用数值稳定性好的奇异值分解技术, 并与 R-T-S 固定区间平滑方法相结合, 利用作者提出的基于奇异值分解(SVD)的卡尔曼滤波方法^[3], 提出一种基于 SVD 的固定区间平滑新方法, 较好地解决了平滑中的矩阵求逆和数值稳定性问题。数值仿真结果表明了本文方法的有效性和优越性。

2 R-T-S 平滑算法

考虑如下线性离散系统

$$X_{k+1} = \Phi_k X_k + W_k, \quad (1)$$

$$Y_k = H_k X_k + V_k. \quad (2)$$

式中 $k = 0, 1, \dots, N, X_k \in \mathbb{R}^n$ 是状态向量, $Y_k \in \mathbb{R}^m$ 是观测向量, $W_k \in \mathbb{R}^n, V_k \in \mathbb{R}^m$ 分别是系统噪声和观测噪声。假设 W_k, V_k 是相互独立的高斯白噪声, 且有

$$E[W_k] = 0, \quad E[V_k] = 0, \quad E[W_k W_k^T] = Q \delta_{ij}, \quad E[V_k V_k^T] = R \delta_{ij}.$$

初始状态 X_0 为与噪声互不相关的高斯任意向量, 均值为 μ_0 , 方差为 P_0 。

则卡尔曼滤波算法为

时间更新:

$$\hat{X}_{k+1|k} = \Phi_k \hat{X}_{k|k}, \quad (3)$$

$$P_{k+1|k} = \Phi_k P_{k|k} \Phi_k^T + Q_k. \quad (4)$$

* 国家自然科学基金和国防预研基金资助项目。

本文于 1995 年 7 月 15 日收到, 1996 年 4 月 15 日收到修改稿。

量测更新:

$$\hat{X}_{k+1|k+1} = \hat{X}_{k+1|k} + K_{k+1}(Y_{k+1} - H_{k+1}\hat{X}_{k+1|k}), \quad (5)$$

$$P_{k+1|k+1}^{-1} = P_{k+1|k}^{-1} + H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} H_{k+1}, \quad (6)$$

$$K_{k+1} = P_{k+1|k} H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1}. \quad (7)$$

R-T-S 平滑算法如下:

$$\hat{X}_{k|N} = \hat{X}_{k|k} + C_k(\hat{X}_{k+1|N} - \hat{X}_{k+1|k}), \quad (8)$$

$$P_{k|N} = P_{k|k} + C_k(P_{k+1|N} - P_{k+1|k})C_k^T. \quad (9)$$

平滑增益阵为:

$$C_k = P_{k|k} \Phi_k^T P_{k+1|k}^{-1}. \quad (10)$$

3 基于奇异值分解的卡尔曼滤波算法

基于 SVD 的卡尔曼滤波算法实现的基本思想是将上述协方差阵进行奇异值分解,从而把协方差阵的迭代变换成奇异值分解阵的迭代计算,即令

$$P_{k|k} = U_{k|k} D_{k|k}^2 U_{k|k}^T, \quad (11)$$

代入(4)式有

$$P_{k+1|k} = \Phi_k U_{k|k} D_{k|k}^2 U_{k|k}^T \Phi_k^T + Q_k. \quad (12)$$

现在的问题是如何由 $U_{k|k}, D_{k|k}$ 计算得到 $P_{k+1|k} = U_{k+1|k} D_{k+1|k}^2 U_{k+1|k}^T$ 的奇异值分解,为此构造下式左端阵,并对其进行奇异值分解

$$\begin{bmatrix} D_{k|k} U_{k|k}^T \Phi_k^T \\ \sqrt{Q_k} \end{bmatrix} = U_k' \begin{bmatrix} D_k' \\ 0 \end{bmatrix} V_k'^T, \quad (13)$$

上式两端左乘以相应矩阵的转置阵,经整理从而求得

$$U_{k+1|k} = V_k', \quad D_{k+1|k} = D_k'. \quad (14)$$

同理为了计算量测更新,即根据一步预算结果 $U_{k+1|k}$ 和 $D_{k+1|k}$ 计算 $U_{k+1|k+1}$ 和 $D_{k+1|k+1}$,设 $R_{k+1}^{-1} = L_{k+1} L_{k+1}^T$,构造下式左端阵,并进行奇异值分解

$$\begin{bmatrix} L_{k+1}^T H_{k+1} U_{k+1|k} \\ D_{k+1|k}^{-1} \end{bmatrix} = \bar{U}_{k+1} \begin{bmatrix} \bar{D}_{k+1} \\ 0 \end{bmatrix} \bar{V}_{k+1}^T, \quad (15)$$

从而有

$$U_{k+1|k+1} = U_{k+1|k} \bar{V}_{k+1}, \quad D_{k+1|k+1} = \bar{D}_{k+1}^{-1}. \quad (16)$$

其滤波增益阵计算如下

$$K_{k+1} = P_{k+1|k+1} H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} = U_{k+1|k+1} D_{k+1|k+1}^2 U_{k+1|k+1}^T H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1}. \quad (17)$$

状态估计方程为

$$\hat{X}_{k+1|k+1} = \hat{X}_{k+1|k} + K_{k+1}(Y_{k+1} - H_{k+1}\hat{X}_{k+1|k}). \quad (18)$$

以上方程即构成了基于奇异值的卡尔曼滤波算法,具体公式推导参见文[3].

4 基于奇异值分解的平滑新算法

与上述滤波算法实现思路相类似,可将 R-T-S 平滑新算法的协方差阵的奇异值分解形式定义如下

$$P_{k|N} = U_{k|N} D_{k|N}^2 U_{k|N}^T, \quad (19)$$

$$P_{k|N+1} = U_{k|N+1} D_{k|N+1}^2 U_{k|N+1}^T. \quad (20)$$

若定义

$$E_k = P_{k|k} - C_k P_{k+1|k} C_k^T, \quad (21)$$

则(9)式可表示为如下形式

$$P_{k|N} = E_k + C_k P_{k+1|N} C_k^T. \quad (22)$$

为了实现(22)式的奇异值分解运算,首先需要进行 $E_k = (I - C_k \Phi_k) P_{k|k}$ 的求逆运算,应用矩阵求逆引理得

$$E_k^{-1} = P_{k|k}^{-1} + \Phi_k^T Q_k^{-1} \Phi_k. \quad (23)$$

为实现(23)式的奇异值分解计算,令

$$E_k = U_k D_k^2 U_k^T. \quad (24)$$

构造下式左端矩阵,并对其进行奇异值分解

$$\begin{bmatrix} \sqrt{Q_k^{-1}} \Phi_k \\ D_{k|k}^{-1} U_{k|k}^T \end{bmatrix} = U_k'' \begin{bmatrix} D_k'' \\ 0 \end{bmatrix} V_k'', \quad (25)$$

等式两边分别左乘各自的转置阵有

$$P_{k|k}^{-1} + \Phi_k^T Q_k^{-1} \Phi_k = V_k'' (D_k'')^2 V_k''^T. \quad (26)$$

比较(23)式和(26)式从而得

$$U_k = V_k'', \quad D_k = (D_k'')^{-1}. \quad (27)$$

下面实现(22)式的奇异值分解,定义如下矩阵

$$\begin{bmatrix} D_k U_k^T \\ D_{k|N+1} U_{k|N+1}^T C_k^T \end{bmatrix},$$

并对其进行奇异值分解

$$\begin{bmatrix} D_k U_k^T \\ D_{k|N+1} U_{k|N+1}^T C_k^T \end{bmatrix} = U_k'' \begin{bmatrix} \bar{D}_k'' \\ 0 \end{bmatrix} \bar{V}_k''^T. \quad (28)$$

等式两边分别左乘各自的转置矩阵有

$$U_k D_k^2 U_k^T + C_k P_{k+1|N} C_k^T = \bar{V}_k'' (\bar{D}_k'')^2 \bar{V}_k''^T. \quad (29)$$

比较(22)式和(29)式得

$$U_{k|N} = \bar{V}_k'', \quad D_{k|N} = \bar{D}_k''. \quad (30)$$

上面推导出了协方差阵奇异值分解后的迭代方程,即由(27)和(30)式的迭代代替了(9)式协方差阵的更新.

平滑增益可直接计算得出

$$C_k = U_{k|k} D_{k|k}^2 U_{k|k}^T \Phi_k^T U_{k+1|k} D_{k+1|k}^{-2} U_{k+1|k}^T. \quad (31)$$

状态平滑方程为

$$\hat{X}_{k|N} = \hat{X}_{k|k} + C_k (\hat{X}_{k+1|N} - \hat{X}_{k+1|k}). \quad (32)$$

5 仿真计算

设系统状态方程和量测方程为

$$X_{k+1} = \Phi_k X_k + W_k, \quad Y_k = H_k X_k + V_k.$$

式中,系统阵和观测阵分别为

$$\Phi_k = \begin{bmatrix} 0.98267788 & -0.00279856 & -0.00247742 \\ -0.03020306 & 0.97903810 & -0.00136841 \\ 0.00214054 & -0.00897400 & 0.89097150 \end{bmatrix},$$

$$H_k = \begin{bmatrix} -0.83977904 & 0.20800722 & 0.00368785 \\ 0.74444975 & -1.0884998 & -0.01013156 \\ -0.67032373 & -0.28034698 & -0.2782092 \end{bmatrix}$$

系统噪声、观测噪声和初始状态是均值为 0, 服从高斯分布的任意值, 且方差阵分别为

$$Q_k = \text{diag}(1.0, 1.0, 1.0) \times e^{-5}, \quad R_k = \text{diag}(1.0, 1.0, 1.0),$$

$$P_0 = \text{diag}(1.0, 1.0, 1.0) \times e^4.$$

首先用基于奇异值分解的卡尔曼滤波算法进行状态估计, 然后用本文的基于 SVD 的平滑算法进行计算. 图 1 分别给出各个状态的滤波误差和平滑误差比较曲线. 从图中可以看出本文新的平滑算法的优良性能, 并且由于在本文算法中, 避免了对协方差阵的求逆运算, 与 R-T-S 平滑算法相比, 不仅数值稳定性得到很大提高, 而且也节省了计算量.

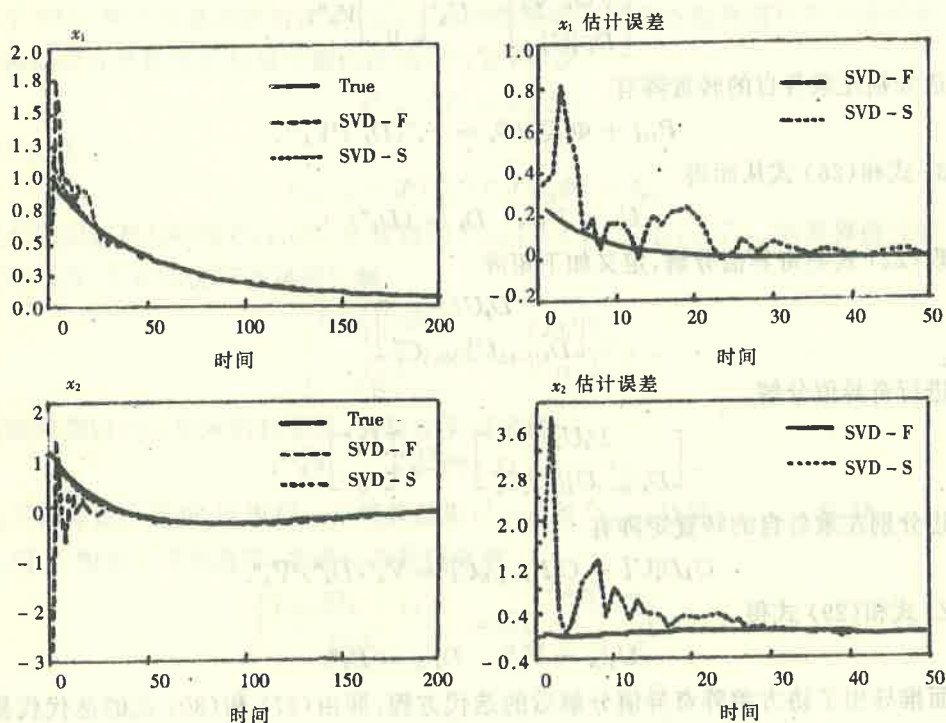


图 1 仿真计算结果

6 结束语

本文基于奇异值分解技术提出了一种新的滤波与固定区间平滑新算法, 不仅大大提高了滤波与平滑算法的数值稳定性和鲁棒性, 而且由于避免了协方差阵的求逆运算, 从而节省了计算量. 此外, 由于本文算法采用了向量和矩阵运算形式, 所以易于在并行计算机上实现.

参 考 文 献

- 1 Anderson, B. D. O. and J. B. Moore.. Optimal filtering. Prentice-Hall, New-Jersey, 1979
- 2 Bierman, G. J.. A new computationally efficient fixed-interval, discrete-time smoother. Automatica, 1983, 19(5):503

- 3 Zhang Youmin, Dai Guanzhong, Zhang Hongcai and Li Qingguo. A SVD-based extended Kalman filter of applying to aircraft flight state and parameter estimation. Proc. of 1994 American Control Conference, Baltimore, Maryland, 1994, 1809-1813
- 4 Oshman, Y.. A new factorized, fixed-interval smoother. AIAA-92-4595
- 5 张友民, 李庆国, 戴冠中, 张洪才. 基于奇异值分解的递推辨识方法. 控制理论与应用, 1995, 12(2): 224-229

A New Fixed-Interval Smoothing Algorithm Based on Singular Value Decomposition

ZHANG Youmin, JIAO Lingyun, CHEN Hongliang and DAI Guanzhong
(Department of Automatic Control, Northwestern Polytechnical University • Xi'an, 710072, PRC)

Abstract: In this paper, a new fixed-interval smoothing algorithm based on singular value decomposition (SVD) technique is proposed. Based on Daunch-Tung-Strebel smoothing algorithm, the new smoother makes use of the singular value decomposition as a main computation tool. The presented algorithm not only has an excellent numerical stability but also does not necessitate the inversion of system transition matrix. The algorithm is formulated in the form of vector-matrix operations, so it is useful for parallel computers. A typical numerical example is used to demonstrate the performance of the new smoother.

Key words: singular value decomposition; Kalman filter, smoothing algorithm

本文作者简介

张友民 1963年生, 副教授, 自控系副主任. 1983和1986年分别本科和研究生毕业于西北工业大学自控系, 获工学学士和硕士学位. 目前主要研究方向为滤波、辨识与随机控制, 神经网络及其在控制中的应用, 故障诊断与容错控制及控制中的并行处理等.

焦凌云 1973年生. 1994年毕业于西北工业大学航空动力与热力工程系, 获工学学士学位, 现为自动控制理论及应用专业研究生. 目前主要研究方向为随机控制, 神经网络及其应用, 故障诊断等.

陈洪亮 1971年生. 1993年毕业于北京理工大学自动控制系, 获工学学士学位, 1996年西北工业大学自动控制系研究生毕业. 主要研究方向为系统建模与随机控制, 故障诊断及容错控制等.

戴冠中 见本刊1997年第1期第84页.