第 14 卷第 4 期
1997 年 8 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 14, No. 4
Aug., 1997

广义系统的周期解

梁家荣　刘永清

(华南理工大学自动控制工程系・广州,510641)

摘要: 本文研究了几类广义系统,得出了一类广义线性非齐次系统存在周期解的充要条件,一类广义线性时变系统存在唯一周期解的充分条件;一类广义非线性系统存在周期解的充分条件.

关键词: 广义系统; 周期解; 指标; 存在性

1 引　言

自从 Rosenbrock H. H. 提出广义系统后,广义系统理论的研究已有二十多年的历史,由于广义系统在实际中有着广泛的应用,因而受到人们的越来越重视;众所周知,广义系统解的基本理论是广义系统理论在实际问题研究中的基础;在广义系统理论方面,文献[1]研究了广义系统的边问题,文献[2]研究了广义系统的稳定性,文献[3]对广义定常线性系统关于初值问题解的存在性及相容性进行了较为深刻的研究. 从某种意义上来说,广义系统是一个大系统[4],我们知道,大系统周期解有着很重要的实际背景(如:电讯工程中的强迫振动,生态系统和经济系统中周期环境的竞争平衡等),对大系统周期解已有不少成果[5~8],但对广义系统周期解的研究文献尚未多见. 广义系统周期解作为广义系统理论的一个重要分支,它的研究对丰富和发展广义系统理论无疑是很有意义的,本文运用类似大系统分解理论方法[9],对几类广义系统进行研究,得到存在周期解的简洁判据.

2 一个充要条件

考虑周期广义系统

$$A\dot{x} + Bx = f(t). \tag{1}$$

其中 $\det A = 0, A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 是常数矩阵, $f(t)$ 是 $n \times 1$ 矩阵函数, $f(t+\omega) = f(t)$, 设 $[A, B]$ 是正则的,即 $\det(sA + B) \neq 0$, $s \in \mathbb{C}$,本文的记号与文[3]一致,记 $\hat{A} = (\lambda A + B)^{-1}A, \hat{B} = (\lambda A + B)^{-1}B$, $\hat{f} = (\lambda A + B)^{-1}f$ 其中 λ 为使 $\det(\lambda A + B) \neq 0$ 纯量,显然系统(1)等价于下述系统

$$\hat{A}\dot{x} + \hat{B}x = \hat{f}. \tag{2}$$

假设 A^D 表示 A 的 Drazin 逆, $\operatorname{Ind}\hat{A} = k$,并且假设所考虑的系统都是易控的[3](tractable).

定理 1　假设 $f(t)$ 是 k 次连续可微函数,则系统(2)存在周期解的充要条件是(2)有一个有界解.

为了证定理 1,先引入如下的引理,记

$$\hat{A}\dot{x} + \hat{B}x = \hat{A}\hat{A}^D\hat{f}. \tag{3}$$

$$\hat{A}\dot{x} + \hat{B}x = (I - \hat{A}\hat{A}^D)\hat{f}. \tag{4}$$

引理 1　$y(t)$ 是(2)的解的充要条件是 $y(t)$ 可分解为系统(3)的一个解 $\varphi(t)$ 与(4)的一个解 $\psi(t)$ 之和.

证　1) 充分性显然.

2) 必要性　设 $y(t)$ 是系统(2)的一个解由[3]可知

本文于 1995 年 11 月 8 日收到. 1996 年 6 月 25 日收到修改稿.

$$y(t)=\mathrm{e}^{-\hat{A}^D\hat{B}(t-t_0)}\hat{A}\hat{A}^DC+\mathrm{e}^{-\hat{A}^D\hat{B}t}\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{\hat{A}^D\hat{B}s}\hat{A}^D\hat{f}(s)\mathrm{d}s$$

$$+(I-\hat{A}\hat{A}^D)\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\ [\hat{A}\hat{B}^D]^i\hat{B}^D\hat{f}^{(i)}(t).$$

取
$$\varphi(t)=\mathrm{e}^{-\hat{A}^D\hat{B}(t-t_0)}\hat{A}\hat{A}^DC+\mathrm{e}^{-\hat{A}^D\hat{B}t}\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{\hat{A}^D\hat{B}s}\hat{A}^D\hat{f}(s)\mathrm{d}s,$$

$$\psi(t)=(I-\hat{A}\hat{A}^D)\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\ [\hat{A}\hat{B}^D]^i\hat{B}^D\hat{f}^{(i)}(t).$$

不难证明 $\varphi(t),\psi(t)$ 分别是(3)和(4)的解. 证毕.

定理1的证明: 1) 必要性显然.

2) 充分性 设 $y(t)$ 是(2)的一个有界解,按上面的取法可知 $\varphi(t),\psi(t)$ 也是有界的. 再由 $f(t)$ 的周期性知,$\psi(t)$ 是一个周期向量函数,为此只要证明 $\varphi(t)$ 是一个周期向量函数即可,把系统(3)分解成如下两个子系统

$$\dot{x}_s=-(C^{-1}-\lambda I_s)x_s+f_s. \tag{5}$$

$$N\dot{x}_r=(I_r-\lambda N)x_r \tag{6}$$

其中 $\hat{A}=T\begin{bmatrix}C & O\\ O & N\end{bmatrix}T^{-1}, s=\dim(\hat{A}), r=n-s, \begin{bmatrix}f_s\\ O\end{bmatrix}=T^{-1}\hat{A}\hat{A}^D\hat{f}$,不难看出(6)的解为 $x_r=0$ 而由 $\mathrm{col}(x_s^{\mathrm{T}},x_r^{\mathrm{T}})=T^{-1}\varphi(t)$ 知(5)也有一个有界解. 由[10]知(5)存在周期解,从而 $\varphi(t)$ 是系统(3)的一个周期解,所以系统(2)存在周期解.

记(2)对应的齐次系统为: $A\dot{x}+Bx=0.$ (7)

定理2 若(7)无非平凡的 ω 周期,则(3)必存在唯一的 ω 周期解 $\varphi(t)$ 且存在常数 λ,μ 使得

$$\mu\int_0^{\omega}|T^{-1}\hat{A}\hat{A}^D\hat{f}|\mathrm{d}t\leqslant\|\varphi(t)\|\leqslant\lambda\int_0^{\omega}|T^{-1}\hat{A}\hat{A}^D\hat{f}|\mathrm{d}t.$$

证 把(3)分解成(5),(6)两个子系统,于是子系统(5)对应的齐次系统无非平凡的 ω 周期解,由[10]知(5)存在唯一的 ω 周期解 $x_1(t)$ 及常数 λ_1,μ_1 使得

$$\mu_1\int_0^{\omega}|f_s|\mathrm{d}t\leqslant\|x_1(t)\|\leqslant\lambda_1\int_0^{\omega}|f_s|\mathrm{d}t.$$

于是 $\varphi(t)=T\mathrm{col}(x_1^{\mathrm{T}},0)$, $\|\varphi(t)\|\leqslant\|T\|\|x_1(t)\|$, $\|x_1(t)\|\leqslant\|T^{-1}\|\|\varphi(t)\|$.

因此 $$\|T^{-1}\|^{-1}\mu_1\int_0^{\omega}|f_s|\mathrm{d}t\leqslant\|\varphi(t)\|\leqslant\|T\|\lambda_1\int_0^{\omega}|f_s|\mathrm{d}t.$$

令 $$\mu=\|T^{-1}\|^{-1}\mu_1.\quad \lambda=\|T\|\lambda_1.$$

故 $\mu\int_0^{\omega}|T^{-1}\hat{A}\hat{A}^D\hat{f}|\mathrm{d}t\leqslant\|\varphi(t)\|\leqslant\lambda\int_0^{\omega}|T^{-1}\hat{A}\hat{A}^D\hat{f}|\mathrm{d}t.$

推论1 若系统(7)无非平凡的 ω 周期解,则系统(2)有唯一确定的 ω 周期解.

证 由定理2知系统(3)存在唯一的 ω 周期解 $x_1(t)$,其次

$$x_2(t)=(I-\hat{A}\hat{A}^D)\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i[\hat{A}\hat{B}^D]^i\hat{B}^D\hat{f}^{(i)}(t)$$

是(4)的一个周期解,因为(4)无非平凡的 ω 周期解,所以(2)有唯一一个周期解 $x_1(t)+x_2(t)$.

3 一类广义非线性系统

$$\hat{A}\dot{x}+\hat{B}x=\hat{g}(t,x). \tag{8}$$

其中 $\hat{g}(t,x)=(\lambda A+B)^{-1}g(t,x)$. 假设 $g(t+\omega,x)=g(t,x)$, $\mathrm{Ind}(A)=1$,记 $B_\omega=\{u(t)|u(\omega)=u(0),u(t)\in C\}$ 不难验证 B_ω 是一个 Banach 空间[10], $\|(I-\hat{A}\hat{A}^D)\hat{B}^D\|=R$, $\|\mathrm{e}^{-\hat{A}^D\hat{B}t}\hat{A}^D\|\leqslant$

$M, t \in [0,\omega]$.

定理 3　1) 若(8)对应的齐次系统无非平凡的 ω 周期解;

2) $\hat{g}(t,x)$ 关于 x 满足 Lipstiz 条件即存在常数 L 使得 $\|\hat{g}(t,x)-\hat{g}(t,y)\| \leqslant L\|x-y\|$ 且 $(M\omega+R)L<1$,则系统(8)存在 ω 周期解.

证　对任意的 $u(t)\in B_\omega$ 由系统(8)得到如下的线性非齐次系统

$$\hat{A}\dot{x}+\hat{B}x=\hat{g}(t,u(t)).\tag{9}$$

由推论 1 知(9)存在唯一的 ω 周期解 $x(t)$,又由[3]知这唯一的 ω 周期解可表示为

$$x(t)=\mathrm{e}^{-\hat{A}^D\hat{B}t}\hat{A}\hat{A}^DC+\mathrm{e}^{-\hat{A}^D\hat{B}t}\int_0^t \mathrm{e}^{\hat{A}^D\hat{B}s}\hat{A}^D\hat{g}(s,u(s))\mathrm{d}s+(I-\hat{A}\hat{A}^D)\hat{B}^D\hat{g}(t,u(t))$$

定义映射 $T: u(t)\in B_\omega$

$$T(u(t))=\mathrm{e}^{-\hat{A}^D\hat{B}t}\hat{A}\hat{A}^DC+\mathrm{e}^{-\hat{A}^D\hat{B}t}\int_{t_0}^t \mathrm{e}^{\hat{A}^D\hat{B}s}\hat{A}^D\hat{g}(s,u(s))\mathrm{d}s+(I-\hat{A}\hat{A}^D)\hat{B}^D\hat{g}(t,u(t)).$$

下面我们来证明 T 是压缩映射.

对于 $u_1(t),u_2(t)\in B_\omega$ 我们得到

$$\hat{A}\dot{x}_1+\hat{B}x_1=\hat{g}(t,u_1(t)),\quad \hat{A}\dot{x}_2+\hat{B}x_2=\hat{g}(t,u_2(t)).$$

两式相减得　$$\hat{A}(\dot{x}_1-\dot{x}_2)+\hat{B}(x_1-x_2)=\hat{g}(t,u_1(t))-\hat{g}(t,u_2(t)).$$

所以
$$\begin{aligned}\|Tu_1(t)-Tu_2(t)\| &= \|x_1(t)-x_2(t)\|\\ &\leqslant \omega\|\mathrm{e}^{-\hat{A}^D\hat{B}(t-s)}\hat{A}^D\|\,\|\hat{g}(t,u_1)-\hat{g}(t,u_2)\|\\ &\quad+\|(I-\hat{A}\hat{A}^D)\hat{B}^D\|\,\|\hat{g}(t,u_1)-\hat{g}(t,u_2)\\ &\leqslant \omega ML\|u_1-u_2\|+RL\|u_1-u_2\|=(\omega M+R)L\|u_1-u_2\|.\end{aligned}$$

因为 $(\omega M+R)L<1$,所以 T 是一个压缩映射,由 Banach 不动点定理知映射 T 在 B_ω 内有唯一不动定点,所以广义系统(8)存在 ω 周期解.

4　一类广义线性时变系统

下面我们考虑如下的广义系统

$$\hat{A}(t)\dot{x}+x=\hat{f}(t).\tag{10}$$

其中 $\det(\hat{A})=0$, $\hat{f}(t+\omega)=\hat{f}(t)$, $\hat{A}(t+\omega)=\hat{A}(t)$,记(10)的对应的齐次系统为

$$\hat{A}(t)\dot{x}+x=0.\tag{11}$$

假设 $\mathrm{rank}(\hat{A})=\mathrm{constant}$,对于系统(10)我们有如下的

定理 4　若(11)无非平凡的 ω 周期解,且 $\mathrm{Ind}(\hat{A}(0))=0$, $\hat{A}(t)$, $\hat{f}(t)$ 是连续可微的,则(10)存在唯一的 ω 周期解.

证明定理 4 要用到如下引理,记

$$\hat{A}(t)=\begin{bmatrix}A_1(t) & A_2(t)\\ A_3(t) & A_4(t)\end{bmatrix}.$$

引理 2　若 $\mathrm{Ind}(\hat{A}(0))=0$,且 $\mathrm{rank}A(t)=\mathrm{rank}(A_1(t),A_2(t))$,则必存在周期矩阵函数 $C(t)$,使 $A_3(t)=C(t)A_1(t)$, $A_4(t)=C(t)A_2(t)$,且 $C(t)$ 与 $A_i(t)(i=1,2,3,4)$ 具有相同的光滑性.

证　由文[3]P145 知存在矩阵函数 $C(t)$,使得 $A_3(t)=C(t)A_1(t)$, $A_4(t)=C(t)A_2(t)$,且 $C(t)$ 与 $A_i(t)(i=1,2,3,4)$ 具有相同的光滑性,下证 $C(t)$ 是周期矩阵函数

因为　$$A_i(t+\omega)=A_i(t),\quad i=1,2,3,4.$$

所以　$$A_3(t)=C(t+\omega)A_1(t),\quad A_4(t)=C(t+\omega)A_2(t).$$

$$C(t+\omega)A_1(t) = C(t)A_1,\quad C(t+\omega)A_2(t) = C(t)A_2.$$

因此 $$(C(t+\omega) - C(t))A_1(t) = 0,\quad (C(t+\omega) - C(t))A_2(t) = 0.$$

因为$[A_1(t), A_2(t)]$是行满铁的，所以$C(t+\omega) - C(t) = 0$，即$C(t+\omega) = C(t)$ 引理2得证.

定理4的证明： 若$\mathrm{Ind}(\hat{A}(0)) = 0$，由[3]P146的推论6.4.1知$A_1(t) + A_2(t)C(t)$是可逆的，此外系统(10)可改写为

$$A_1(t)\dot{x}_1(t) + A_2(t)\dot{x}_2(t) + x_1(t) = f_1(t). \tag{12}$$

$$C(t)A_1(t)\dot{x}_1(t) + C(t)A_2(t)\dot{x}_2(t) + x_2(t) = f_2(t). \tag{13}$$

所以 $$-C(t)x_1(t) + x_2(t) = f_2(t) - C(t)f_1(t).$$

从而$x_2(t) = C(t)x_1(t) + f_2(t) - C(t)f_1(t)$，代入(12)整理得

$$\begin{aligned}&[A_1(t) + A_2(t)C(t)]\dot{x}_1(t) + (A_2(t)\dot{C}(t) + I)x_1(t) \\ &= f_1(t) - A_2(t)\dot{f}_2(t) + A_2(t)(C(t)\dot{f}_{12}(t) + \dot{C}(t)f_1(t)).\end{aligned} \tag{14}$$

由(11)无非平凡的ω周期解得(14)对应齐次系统无非平凡的ω周期解由[10]知(14)存在唯一的ω周期解$\varphi(t)$，从而有

$$x_2(t) = \psi(t) = C(t)\varphi(t) + f_2(t) - C(t)f_1(t).$$

因此系统(10)存在唯一的ω周期解$x(t) = \mathrm{col}(\varphi^{\mathrm{T}}(t), \psi^{\mathrm{T}}(t))$.

参考文献

1 Wan wei and Liu Yongqing. Montone iterative tehnique for boundary value problem of singular mtegrodifferential systems technology，华南理工大学学报，1995，23(6)：48－52

2 Xie Xiangsheng and Liu Yongqing. General characteristin equation and stability of linear singular systems of differential equaion with delay，华南理工大学学报，1995，23(6)，111－117

3 Campbell. SL.. Singular systems of differential equations，pitman advanced publishing progam，Sanfrancisco London Melbourne，1980

4 王朝珠，戴立意．广义动态系统．控制理论与应用，1989，3(1)：2－12

5 王慕秋，李黎明．非线性周期大系统的平稳振荡．应用数学学报，1991，Vol. 4(2)，220－228

6 王慕秋，王联，吕绍明．关于大系统周期解的存在性．科学通报，1987，(13)：972－975

7 王美娟．关于若干大系统周期解的研究．应用数学学报，1992，15(1)：48－57

8 王美娟．关于一类线性时变大系统的平稳振荡．应用数学学报，1985，8(4)，489－497

9 刘永清，宋中昆．大型动力系统的理论与应用，广州：华南理工大学院出版社，1989

10 张棣，赵晓强，高占海．空间周期解的理论与应用．南京大学学报数学半年刊，1987，37－49

The Periodic Solutions of Singular Systems

LIANG Jiarong　and　LIU Yongqing

(Department of Automatic Control Engineering，South China University of Technology • Guangzhou，510641，PRC)

Abstract：In this paper，singular systems of several classes are studied. We obtain the necessary and sufficient condition which singular systems of a class exist only one periodic solution，the sufficient condition which singular linear systems of variable time exist only one periodic solution and the sufficient condition which singular nonlinear systems of a class exist only one periodic solution.

Key words：singular system；periodic solution；index；existence.

本文作者简介

梁家荣　1966年生．博士生．主要感兴趣的研究：广义系统周期解及广义控制系统．

刘永清　见本刊1997年第1期第33页．