第14卷第4期　　控制理论与应用　　Vol. 14, No. 4
1997年8月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　Aug., 1997

非线性系统变结构观测器

王　江　王先来　王海涛
(天津大学电力及自动化工程系,300072,天津)

摘要: 本文研究了非线性系统的变结构观测器,分别讨论了干扰满足及不满足匹配条件下观测器的鲁棒性,证明了观测器的构造误差是一致最终有界的.

关键词: 观测器; 一致最终有界; 变结构; 滑模

1　引　言

在非线性系统理论中近年来出现了许多新型状态观测器,如:反馈线性化技术[1~4],扩展线性化技术[5],变结构观测器[6].在[6]的工作中比较了几种非线性观测器,指出当系统中非线性及不确定因素具有明确的边界时,变结构观测器具有良好的鲁棒性.变结构观测器利用滑模的特性,使观测器对干扰及不确定因素具有不变性,当然这时的非线性因素及干扰满足匹配条件.

[6]中所讨论的变结构观测器只考虑了具有匹配干扰的系统,而对于干扰不满足匹配条件的非线性系统变结构观测器的性质没有讨论.

[9][10]等研究了非线性系统的输出反馈及跟踪控制,但对系统提出了严格限制,采用观测器可以避免限制.

本文研究系统中不确定因素满足匹配条件但具有小的慢变脉冲干扰的变结构观测器和不确定因素不满足匹配条件的变结构观测器.此观测器适用于线性定常系统和可化为正则型的非线性系统.采用 Lyapunov 函数作为稳定观测器的判别条件,使观测器具有一致最终有界的构造误差.

2　系统描述

讨论如下系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + \eta(t,x) + \sigma(t), \\ y = Cx. \end{cases} \tag{1}$$

式中,$x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^p, p \geqslant m, A, B, C$ 是有相应维数的矩阵,$\sigma(t)$ 为慢变脉冲干扰,$\eta(t,x)$ 为非线性因素、不确定因素及系统参数变化等.

系统(1)的形成有两种情况:

a) 系统本身是线性定常的;

b) 系统原来的数学模型为

$$\begin{cases} \dot{z} = f(z) + g(z)u' + \eta'(t,z,u') + \sigma'(t), \\ y = h(z). \end{cases} \tag{2}$$

经过正则变换[7],将系统(2)变为如下形式:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + \alpha(x) + \eta(t,x) + \sigma(t), \\ y = Cx. \end{cases} \tag{3}$$

(3)式中 $\alpha(x)$ 为确定的非线性项,对系统(3)和(1)可以采用相同的观测器.

在(3)和(1)式中 $\eta(t,x)$ 为非线性不确定因素,包括 A, B 的变化及外部干扰.

本文于1995年4月1日收到. 1997年2月24日收到修改稿.

假设 1 $\eta(t,x)$ 满足如下条件：

$$\begin{cases}\eta(t,x)=\eta_1(t,x)+\eta_2'(t,x),\\ \eta_2'(t,x)=B\eta_2(t,x),\\ \eta_1(t,x)=(I_mB)^{\perp}.\end{cases} \tag{4}$$

即 $\eta_1(t,x)$ 不满足匹配条件，$\eta_2'(t,x)$ 满足匹配条件，且

$$\begin{cases}\|\eta_1(t,\tilde{x})-\eta_1(t,x)\|\leqslant\alpha_1<\infty,\\ \|\eta_2(t,\tilde{x})-\eta_2(t,x)\|\leqslant\alpha_2<\infty.\\ \|\sigma(t)\|\leqslant\delta.\end{cases} \tag{5}$$

式中 α_1,α_2,δ 为正常数，$\tilde{x}$ 为 x 的观测值.

3 $\eta_1(t,x)=0$ 的变结构观测器

定义 1 系统有一致最终界 $x\in S\subset\mathbb{R}^n$，$S$ 是一有界集. 则

1) 对于某一不确定关系和某一初始条件 $(t_0,x(t_0))\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$，系统存在一个解 $x(\cdot):[t_0,t_1)\to\mathbb{R}^n$，$t_1>t_0$. $x(\cdot)$ 表示 x 是某一变量的函数.

2) 给定任意实数 $\delta>0$，则存在一个实数 $d(\delta)>0$，那么对于每一个解 $x(\cdot):[t_0,t_1]\to\mathbb{R}^n$，当 $\|x(t_0)\|<\delta$，有 $\|x(t)\|<d(\delta)$，$t>t_0$，所有解在 (t_0,∞) 是连续的.

3) 对于每一 $x(t_0)\in\mathbb{R}^n$，存在着一非负常数 $T(x(t_0,S))\in\mathbb{R}^+$，那么对于每一个解 $x(\cdot):[t_0,\infty)\to\mathbb{R}^n$，当 $t\geqslant t_0+T(x(t_0),S)$ 时 $x(t)\in S$.

假设 2 (A,C) 是可观的，这意味着存在矩阵 G，使矩阵 $A-GC$ 的所有特征根都在左半平面上(Left Half Plane，简为 LHP).

假设 3 $\eta_1(t,x)=0$.

对于系统(1)，当满足假设 1～3 的条件下，构造如下变结构观测器.

$$\dot{\tilde{x}}=(A-GC)\tilde{x}+Bu(t)+Gy+v+\eta_2(t,\tilde{x}). \tag{6}$$

$$v=\begin{cases}\dfrac{BFCe}{\|FCe\|}\rho, & \text{当 } FCe>0 \text{ 且 } \|\rho\|>\alpha_2,\\ B\alpha_2, & \text{当 } FCe=0.\end{cases} \tag{7}$$

式中 $e(t)=x(t)-\tilde{x}(t)$，$\tilde{x}$ 为 x 的观测值.

假设 4 对于系统(1) 存在着正定矩阵 $Q\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 和矩阵 $F\in\mathbb{R}^{m\times p}$ 使得

$$FC=B^{\mathrm{T}}P. \tag{8}$$

式中矩阵 P 是唯一的对称正定矩阵，满足如下 Lyapunov 方程

$$A_0^{\mathrm{T}}P+PA_0=-Q\ . \tag{9}$$

式中

$$A_0=A-GC\ . \tag{10}$$

引理 1[8] 对于任意 $g\in\mathbb{R}^q$ 有如下不等式

$$\lambda_1\|g\|^2\leqslant g^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}}Mg\leqslant\lambda_q\|g\|^2. \tag{11}$$

式中 $M\in\mathbb{R}^{n\times q}$，$q\leqslant n$，$\mathrm{rank}(M^{\mathrm{T}}M)=q$，$0<\lambda_1\cdots\leqslant\lambda_q$ 是 $M^{\mathrm{T}}M$ 的特征根，$\|\cdot\|$ 表示欧氏范数，且

$$\lambda_m(M^{\mathrm{T}}M)=\lambda_1,\quad \lambda_M(M^{\mathrm{T}}M)=\lambda_q\ .$$

定义 2 设 $s=FCe$ 为滑模平面，如果：Ⅰ) 任意在其上面的观测误差能保持不变，Ⅱ) 所有状态空间的状态误差在有限时间能到达 s 上，则 $s=FCe$ 是渐近稳定的.

定理 1 对于系统(1) 及(3)，当满足假设 1～3 时，则采用(7) 作为非线性控制的观测器

(6) 有一致最终有界的构造误差，且当 $\sigma(t)=0$ 时，有 $\lim\limits_{t\to\infty}(x(t)-\tilde{x}(t))=\lim\limits_{t\to\infty}e(t)=0$.

证　根据(1) 和(6)：

$$\dot{e}=(A-GC)e-\frac{BFCe}{\|FCe\|}\rho+B\eta_2(t,x)-B\eta_2(t,\tilde{x})+\delta(t). \tag{12}$$

取 Lyapunov 函数：

$$V(e)=e^{\mathrm{T}}Pe. \tag{13}$$

则有：

1) 当 $FCe\neq 0$,

$$\begin{aligned}\dot{V}(e)&=\dot{e}^{\mathrm{T}}Pe+e^{\mathrm{T}}P\dot{e},\\&=e^{\mathrm{T}}(A_0^{\mathrm{T}}P+PA_0)e-2\frac{e^{\mathrm{T}}PBFCe}{\|FCe\|}\rho+2e^{\mathrm{T}}PB[\eta_2(t,x)-\eta_2(t,\tilde{x})],\\&=-e^{\mathrm{T}}Qe-2\|FCe\|\rho+2e^{\mathrm{T}}PB[\eta_2(t,x)-\eta_2(t,\tilde{x})],\\&\leqslant-\lambda_m(Q)\|e\|^2-2\|FCe\|\|\rho-\alpha_2\|,\\&\leqslant-\lambda_m(Q)\|e\|^2<0.\end{aligned} \tag{14}$$

式中 $\lambda_m(Q)$ 为 Q 的最小特征根，显然观测器是收敛的.

2) 当 $FCe=0$,

$$\begin{aligned}\dot{V}&=\dot{e}^{\mathrm{T}}Pe+e^{\mathrm{T}}P\dot{e},\\&=-e^{\mathrm{T}}Qe-2e^{\mathrm{T}}PB\alpha_2+2e^{\mathrm{T}}PB[\eta_2(t,x)-\eta_2(t,\tilde{x})]+2e^{\mathrm{T}}P\delta(t),\\&\leqslant-\lambda_m(Q)\|e\|^2+2\|e\|\lambda_M(P)\delta.\end{aligned} \tag{15}$$

式中 $\lambda_M(P)$ 为 P 最大特征根.

根据式(15) 有：

$$\text{当}\ \|e\|>\frac{2\lambda_M(P)}{\lambda_m(Q)}\delta\ \text{时},\dot{V}(e)<0.$$

即观测器有一致最终界的构造误差：

$$\|e\|>\frac{2\lambda_M(P)}{\lambda_m(Q)}\delta.$$

当 $\delta=0$ 时有：$\lim\limits_{t\to\infty}e(t)=0$.　　证毕.

4　$\eta_1(t,x)\neq 0$ 观测器的鲁棒性

当系统中的非线性 / 不确定因素的不匹配部分不等于零时，可采用原来的观测器，但误差的界发生了变化.

当 $\eta_1(t,x)\neq 0$，系统变为

$$\dot{x}=Ax+Bu(t)+\eta_1(t,x)+B\eta_2(t,x)+\delta(t).$$

观测器结构为

$$\dot{\tilde{x}}=(A-GC)\tilde{x}+Bu(t)+v+Gy+\eta_1(t,\tilde{x})+B\eta_2(t,\tilde{x}). \tag{16}$$

式中控制 v 与原来观测器相同.

定理 2　系统(1) 及(3) 满足所有假设且 $\eta_1(t,x)\neq 0$，当采用(16) 及(7) 所示观测器时，观测器一致最终有界(GUUB)，误差的界为

$$\|e\|\leqslant\frac{2\lambda_M(P)}{\lambda_m(Q)}(\alpha_1+\delta).$$

证　取如下 Lyapunov 函数：

$$V(e)=e^{\mathrm{T}}Pe. \tag{17}$$

1) $$s = FCe \neq 0 \quad (e \notin s).$$

则
$$\begin{aligned}\dot V(e) &= \dot e^{\mathrm T}Pe + e^{\mathrm T}P\dot e \\ &= -e^{\mathrm T}Qe + 2e^{\mathrm T}PB[\eta_2(t,x) - \eta_2(t,\tilde x)] - [2e^{\mathrm T}PBFCe/\|FCe\|]\rho \\ &\quad + 2e^{\mathrm T}P[\eta_1(t,x) - \eta_1(t,\tilde x)] \\ &\leqslant -e^{\mathrm T}Qe + 2e^{\mathrm T}P[\eta_1(t,x) - \eta_1(t,\tilde x)] \\ &\leqslant -\lambda_m(Q)\|e\|^2 + 2\|e\|\lambda_M(P)\alpha_1.\end{aligned} \tag{18}$$

对于式(18),当 $\|e\| > \dfrac{2\lambda_M(P)}{\lambda_m(Q)}\alpha_1$,$\dot V(e) < 0$,观测器收敛.

2) $$s = FCe = 0.$$

$$\begin{aligned}\dot V(e) &= \dot e^{\mathrm T}Pe + e^{\mathrm T}P\dot e, \\ &= -e^{\mathrm T}Qe + 2e^{\mathrm T}PB[\eta_2(t,x) - \eta_2(t,\tilde x)] - 2e^{\mathrm T}PB\alpha_2 \\ &\quad + 2e^{\mathrm T}P[\eta_1(t,x) - \eta_1(t,\tilde x)] + 2e^{\mathrm T}P\delta(t) \\ &\leqslant -\lambda_m(Q)\|e\|^2 + 2e^{\mathrm T}P[\eta_1(t,x) - \eta_1(t,\tilde x)] + 2e^{\mathrm T}P\delta(t) \\ &\leqslant -\lambda_m(Q)\|e\|^2 + 2\lambda_M(P)\alpha_1\|e\| + 2\lambda_M(P)\|e\|\delta \\ &= \|e\|[-\lambda_m(Q)\|e\| + 2\lambda_M(P)(\alpha_1 + \delta)].\end{aligned} \tag{19}$$

若使(19)小于零,必有

$$\|e\| \geqslant \frac{2\lambda_M(P)}{\lambda_m(Q)}(\alpha_1 + \delta).$$

因此,观测器的构造误差为

$$\|e\| \leqslant \frac{2\lambda_M(P)}{\lambda_m(Q)}(\alpha_1 + \delta). \tag{20}$$

证毕.

据以上几个定理,要保证观测器一致最终有界,有几个参数需要确定:

1) 选择 G 来保证 $A_0 = A - GC$ 的所有特征根都落在 LHP,

2) 根据不确定因素来确定 ρ,

3) 选择 $C^{\mathrm T}F^{\mathrm T} = PB$,解此式,保证 P 是正定对称矩阵,

4) 根据 $A_0^{\mathrm T}P + PA_0 = -Q$ 来解出 Q,Q 是正定对称矩阵,

5) 如果 Q 不是正定对称矩阵,返回 3),再求解 P,Q.

注 1 F 矩阵的选取(即存在 P 的充分条件[8]),是保证下式为正实的:

$$G_F(S) = FC(SI - A_0)^{-1}B. \tag{21}$$

式中,$G_F(S)$ 为系统的传递函数.

5 结 论

利用变结构原理构造非线性系统观测器,当干扰具有匹配特性时,保证观测误差收敛到零.当不满足匹配条件干扰存在时,观测器存在误差,观测器的误差一致最终有界.本文所讨论的观测器具有一定的鲁棒性,各种随机干扰对观测器的影响是下一步的研究课题.

参 考 文 献

1 Isidori, A.. Nonlinear control systems: an introduction. Springer-Verlag; Berlin, 1985

2 Bestle, D. and Zeitz, M.. Canonical form observer design for nonlinear time-variable system. Int. J. Control, 1983, 38(2): 419—431

3 Krener, A. J. and Respondek, W.. Nonlinear observer with linearizable error dynamics. SIAM. J. Control Optim., 1985, 23(2): 197—216

4 XIA, X. H, and GAO, W. B.. Nonlinear observer design by observer canonical forms. Int. J. Control, 1988, 47(4): 1081—1100

5 Baumann, W. and Rugh, W.. Feedback control of nonlinear systems by extended linearization. IEEE Trans. Automat. Contr., 1986, AC-31(1): 40—46

6 Walcott, B. L., Corless, M. J. and Zak, S. H.. Comparative study of nonlinear state-observation techniques. Int. J. Control, 1987, 45(6): 2109—2132

7 王海涛. 仿射非线性系统的滑模变结构控制. 天津大学硕士论文, 天津, 1994

8 黄琳. 稳定性理论. 北京: 北京大学出版社, 1992

9 White, B. A.. Applications of output feedback in variable structure control. in Deterministic Control of Uncertain Systems, 1990, A. S. I. Zinober, Ed., Ch. 8, 144—169

10 Elmali, H. and Olgac, N.. Robust output tracking control of nonlinear MIMO systems via sliding mode technique. Automatica, 1992, 28(1): 145—151

Variable Structure Observer of Non-Linear Control Systems

WANG Jiang, WANG Xianlai and WANG Haitao

(Department of Electrical Engineering and Automation, Tianjin University · Tianjin, 300072, PRC)

Abstract: The variable structure observer with sliding mode for non-linear systems is discussed. The robustness of the observer is obtained under matched and unmatched conditions. The construct error of the observer is of the uniform ultimate boundedness.

Key words: observer; uniform ultimate boundedness; variable structure; sliding mode

本文作者简介

王　江　1964 年生. 1986 年毕业于天津大学电力及自动化工程系, 获工学学士学位, 并于 1989 年和 1996 年在天津大学获工学硕士和博士学位. 1989 年至今, 在天津大学从事教学和科研工作, 现为天津大学电力及自动化工程系副教授. 研究方向为: 变结构控制理论与应用, 控制理论在工业过程中的应用等. 在国内主要刊物上发表论文数篇.

王先来　1946 年生. 1970 年毕业于天津大学电力及自动化工程系, 后一直在天津大学任教. 现为天津大学电力及自动化工程系教授. 研究方向为: 辨识与自适应控制, 智能控制, 非线性系统控制等.

王海涛　1972 年生. 1992 年毕业于山东大学数学系, 获学士学位, 1994 年在天津大学获工学硕士学位, 现为天津大学管理学院博士研究生.