

单输入/单输出非线性系统的状态观测器设计*

苏宏业 汪 洋 褚 健

(浙江大学工业控制研究所·杭州, 310027)

摘要: 本文提出了一类非线性系统的状态观测器设计方法. 针对单输入/单输出非线性系统, 首先通过非线性状态变换, 把原非线性系统变换成简单的中间非线性模型; 然后对该简单的中间非线性模型设计稳定的常增益状态观测器; 从而经状态逆变换得到原非线性系统的非线性状态观测器. 最后通过一倒立摆非线性系统的仿真研究说明了该方法的有效性和可行性.

关键词: 仿射非线性系统; 状态变换; 可观测性; 状态观测器

1 引 言

近年来, 利用状态估计器(观测器)来软测量系统的状态得到了很多学者的重视和研究. 对于线性系统, 其观测器理论的研究已经趋于完善、成熟^[1]. 而非线性系统的观测器理论则仍处于研究阶段, 远没有达到象线性系统那样的成熟程度, 还存在很多问题有待解决. 目前针对非线性系统, 已提出的观测器设计方法大致有以下几种: 扩展 Kalman 滤波器(Extended Kalman Filter, EKF); 输出注入(Output Injection)方法; 基于非线性观测标准型(Observer Canonical Forms)的观测器设计方法; 高增益 Luenberger-Like 观测器设计方法等. 其中高增益 Luenberger-Like 观测器设计方法主要用于解决具有强可观测性的非线性对象的观测器设计问题, 它利用高增益来解决观测器设计的收敛性问题, 并且可以从理论上得到收敛性证明, 其优点是增益是常值, 故相对于 EKF 方法具有计算简单, 易于实现. 因此, 本文亦基于高增益观测器的设计思想, 利用状态变换的方法, 提出一种具有一定衰减度的非线性状态观测器设计方法.

2 非线性状态变换存在性条件

考虑 SISO 非线性系统:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u, \\ y &= h(x).\end{aligned}\quad (1)$$

其中, $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}; f(x), g(x)$ 为 C^∞ 非线性函数向量场, 假设存在 C^2 非线性状态变换: $z = T(x)$, 且 $x = T^{-1}(z)$ 存在并连续, 将系统(1)转换为如下简单的非线性中间模型

$$\begin{aligned}\dot{z} &= Az + \alpha(z) + \beta(z)u, \\ y &= Cz.\end{aligned}\quad (2)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha(z) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ a(z) \end{bmatrix}, \quad \beta(z) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ b(z) \end{bmatrix},$$

$$C = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0].$$

* 国家自然科学基金和浙江省自然科学基金资助项目.

本文于 1994 年 12 月 29 日收到, 1996 年 4 月 8 日收到修改稿.

且有: $a(z) = a(T(x)) = \bar{a}(x)$, $b(z) = b(T(x)) = \bar{b}(x) \neq 0$, 则我们有如下的非线性状态可逆变换存在性引理^[4]:

引理 1 对于非线性系统(1), 通过一 C^2 非线性状态可逆变换 $z = T(x)$ 将其转换为非线性系统(2)的充要条件是

i) $\text{rank } M(x) = n$. 其中: $M(x) = [g(x) \quad \text{ad}_{f(x)}g(x) \quad \cdots \quad \text{ad}_{f(x)}^{n-1}g(x)]$.

ii) $M^{-T}(x)\bar{\beta}(x)$ 可积, 其中 $\bar{\beta}(x) = \beta(z) = \beta(T(x))$. 当取 $\bar{b}(x) = 1$ 时, 即要求 $M^{-1}(x)$ 的第 n 行可积.

iii) 非线性系统(1)具有相对阶次 n .

3 非线性状态观测器设计

由于对于非线性系统(1), 我们难以直接进行状态观测器设计, 故我们在此利用前述第 2 节的结果, 先针对等价变换后的系统(2)进行状态观测器设计, 然后设法得到原系统(1)的稳定收敛的状态观测器.

假设非线性系统(1)是完全一致可观的^[3], 并且满足引理 1 中的微分同胚存在性条件, 则必定存在一 C^2 非线性可逆状态变换(微分同胚) $z = T(x)$, 把非线性系统(1)等价变换成系统(2), 则我们考虑非线性系统(2), 可得如下的常增益非线性状态观测器定理:

定理 1 假设非线性系统(1)对任意输入 $u(t)$ 是完全一致可观的, 并且其等价非线性系统(2)中的 $a(z)$ 和 $b(z)$ 是全局 Lipschitzian, 则对于一致有界的输入 $u(t)$ 和足够大的常数 $\rho > 0$, 非线性系统:

$$\dot{\hat{z}} = A\hat{z} + \alpha(\hat{z}) + \beta(\hat{z})u - P^{-1}(\rho)C^T(C\hat{z} - y) \quad (3)$$

是系统(2)的一个渐近收敛状态观测器, 其中 $P(\rho)$ 是下述代数矩阵方程的正定对称解:

$$A^TP(\rho) + P(\rho)A + \rho P(\rho) = C^TC. \quad (4)$$

证明参见附录 A.

因此针对 SISO 的非线性系统(1), 利用上述结果, 我们提出设计其状态观测器的步骤如下:

Step 1 利用引理 1 中的存在性条件, 判断是否存在 C^2 非线性状态变换, 把非线性系统(1)等价变换成中间非线性模型(2).

Step 2 计算 C^2 非线性状态变换 $z = T(x)$ 为:

$$T_1(x) = h(x), \quad T_{i+1}(x) = \frac{\partial T_i(x)}{\partial x} f(x), \quad i = 1, 2, \cdots, n-1.$$

Step 3 求解代数矩阵方程(4)的对称正定解 $P(\rho)$, 即

$$P_{ij}(\rho) = (-1)^{i+j} \frac{m_{i-1,j} + m_{i,j-1}}{\rho^{i+j-1}}.$$

其中, $m_{0,j} = 0, m_{i,0} = 1, m_{ij}$ 是正常数, $i = 1, 2, \cdots, n; j = 1, 2, \cdots, n$.

Step 4 对于变换后的非线性系统(2), 设计非线性状态观测器

$$\dot{\hat{z}} = A\hat{z} + \alpha(\hat{z}) + \beta(\hat{z})u - P^{-1}(\rho)C^T(C\hat{z} - y).$$

其中 $\alpha(\hat{z}) = \alpha(T(\hat{x})) = \bar{\alpha}(\hat{x}), \beta(\hat{z}) = \beta(T(\hat{x})) = \bar{\beta}(\hat{x})$.

由于在 Step 2 中所得的 C^2 非线性变换是 $z = T(x)$ (或 $\hat{z} = T(\hat{x})$), 故利用上述简单非线性模型(2)的状态观测器所得到的状态估计值 $\hat{z}$ 需经过计算 $\hat{x} = T^{-1}(\hat{z})$ 才能得到原非线性系统(1)的状态估计值, 故在此我们引入一变换技巧, 可以直接得到原系统(1)的状态观测器(详细推导见附录 B):

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}) + g(\hat{x})u - \left(\frac{\partial T(\hat{x})}{\partial \hat{x}}\right)^{-1}P^{-1}(\rho)C^T(h(\hat{x}) - y).$$

由此可见,我们仅只要求得 $z = T(x)$ 对 x 的 Jacobian 矩阵就可以构造原非线性系统的状态观测器,从而使得计算十分简单,易于实现.

综上结果,我们可得原非线性系统的渐近收敛状态观测器定理:

定理 2 假设非线性系统(1)对任意输入 $u(t)$ 是完全一致可观的,并且其等价非线性系统(2)中的 $a(z)$ 和 $b(z)$ 是全局 Lipschitzian,则对于一致有界的输入 $u(t)$ 和足够大常数 $\rho > 0$, 则:

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}) + g(\hat{x})u - \left(\frac{\partial T(\hat{x})}{\partial \hat{x}}\right)^{-1}P^{-1}(\rho)C^T(h(\hat{x}) - y)$$

是非线性系统(1)的一个渐近收敛状态观测器,其中, $P(\rho)$ 是代数矩阵方程(4)的对称正定解.

证 结果是显然的. 由于误差 $e = \hat{z} - z = T(\hat{x}) - T(x)$ 动态是渐近收敛的,有: $t \rightarrow \infty$, $T(\hat{x}) \rightarrow T(x)$; 而 C^2 可逆变换 $z = T(x)$ 是一一对应的,因此,必定有: $t \rightarrow \infty$, $\hat{x} = T^{-1}(\hat{z}) \rightarrow x = T^{-1}(z)$. 证毕.

4 仿真例子

为了说明上述所提出的非线性系统状态观测器设计方法的有效性和可行性,我们针对一倒立摆非线性系统的状态观测问题进行仿真研究. 倒立摆动态系统的运动方程为^[5]

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \frac{g \sin(x_1) - amLx_2^2 \sin(2x_1)/2 + a \cos(x_1)u}{4L/3 - amL \cos^2(x_1)}, \\ y &= x_1. \end{aligned}$$

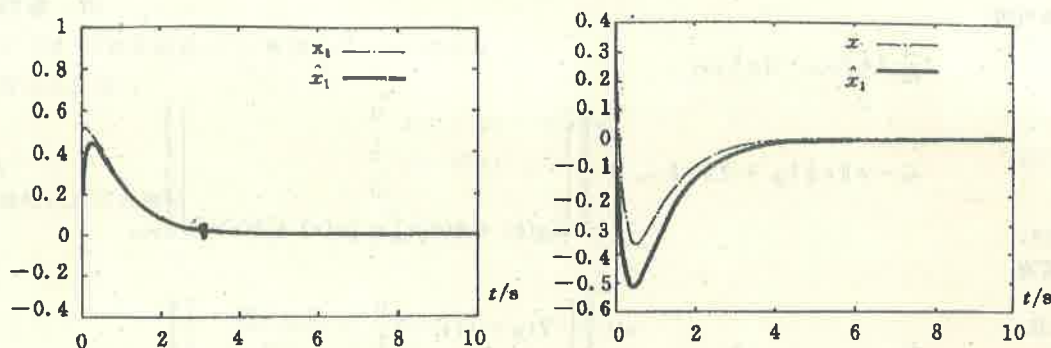
其中, x_1 是倒立摆与垂直方向的偏离角(单位:弧度), x_2 是倒立摆偏离角的角速度(单位:弧度/秒), u 是作用在小车上的拉力(单位:牛顿力), m 是倒立摆的质量(单位:千克), M 是小车的质量(单位:千克), $2L$ 是摆杆的长度(单位:米), g 是重力加速度(单位:米/秒²), $a = \frac{1}{M+m}$. 选取各参数值为: $m = 2.0\text{kg}$, $M = 8.0\text{kg}$, $2L = 1.0\text{m}$, $g = 9.8\text{m/s}^2$. 易验证该系统满足引理 1 中的第一个条件,故我们可以利用第 3 节中的状态观测器设计方法可得原系统的状态观测器

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 - 2\rho(\hat{x}_1 - y), \\ \dot{\hat{x}}_2 &= \frac{294 \sin(\hat{x}_1) - 1.5 \hat{x}_2^2 \sin(2\hat{x}_1) + 3 \cos(\hat{x}_1)u}{20 - 3 \cos^2(\hat{x}_1)} - \rho^2(\hat{x}_1 - y). \end{aligned}$$

当实际系统状态的初始值取为 $x_{10} = 0 \text{ rad}$, $x_{20} = 0.4 \text{ rad/s}$, 观测器的初始值为 $\hat{x}_{10} = 0 \text{ rad}$, $\hat{x}_{20} = 0 \text{ rad/s}$, 输入 $u = -143.33x_1 - 45.33x_2$, 输出 $y = x_1$. 则经仿真研究知,当参数 $\rho \geq 4.5$ 时,非线性状态观测器开始收敛至系统实际状态. 当 $\rho = 5$ 时,实际系统状态和观测器的估计状态仿真结果见图 1 所示.

5 结 论

本文提出了一种基于状态变换的非线性系统状态观测器设计方法. 它具有结构简单,易于计算、实现等优点;并且利用参数 ρ 可以使得观测器状态按一定的衰减指数收敛至实际系统状态. 仿真结果表明了这种方法是十分有效的.

图 1 参数 $\rho = 5$ 时, 实际系统状态与观测器估计状态仿真曲线

参 考 文 献

- 1 Chen, C. T.. Linear system theory and design. Holt, Rinehart and Winston, 1984
- 2 Li, C. W. and Tao, L. W.. Observing nonlinear time-variable systems through a canonical form observer. Int. J. Contr., 1986, 44(6):1703-1713
- 3 Gauthier, J. P. and Bornard, G.. Observability for any $u(t)$ of a class of nonlinear systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1981, AC-26:922-926
- 4 Chu, J. and Su, H. Y.. A controller design method for nonlinear systems via a staged-transformation. Int. J. Sys. Sci., 1995, 26(11):2187-2202
- 5 Baumann, W. T. and Rugh, W. J.. Feedback control of nonlinear systems by extended linearization. IEEE Trans. Automat. Contr., 1986, AC-31(1):40-48

附录 A

我们令观测误差 $e = \hat{z} - z$, 则由方程(2)和(3)可得观测误差动态为

$$\begin{aligned} \dot{e} &= (A - P^{-1}(\rho)C^TC)e + \alpha(\hat{z}) - \alpha(z) + (\beta(\hat{z}) - \beta(z))u \\ &= (A - P^{-1}(\rho)C^TC)e + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha(\hat{z}) - \alpha(z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(\hat{z}) - b(z) \end{bmatrix} u. \end{aligned} \quad (A1)$$

我们定义观测误差动态系统(A1)的一 Lyapunov 函数

$$V = e^TP(\rho)e. \quad (A2)$$

因为 $P(\rho)$ 是正定对称的, 及由误差方程(A1)可得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2e^TP(\rho)\dot{e} \\ &= 2e^TP(\rho)Ae - 2e^TC^TCe + 2e^TP(\rho) \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha(\hat{z}) + b(\hat{z})u - [\alpha(z) + b(z)u] \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (A3)$$

我们引入记号: $\|x\|_{P(\rho)} \triangleq [x^TP(\rho)x]^{1/2}$, 则由(A3)式可得

$$\dot{V} = -\rho \|e\|_{P(\rho)}^2 - (Ce)^2 + 2e^TP(\rho) \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha(\hat{z}) + b(\hat{z})u - [\alpha(z) + b(z)u] \end{bmatrix}. \quad (A4)$$

从而可得

$$2 \frac{d}{dt} \|e\|_{P(\rho)} \leq -\rho \|e\|_{P(\rho)} + 2 \|e\|_{P(\rho)} + \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ [a(\hat{z}) + b(\hat{z})u] - [a(z) + b(z)u] \end{bmatrix} \right\|_{P(\rho)} \quad (A5)$$

从而有

$$\frac{d}{dt} \|e\|_{P(\rho)} \leq -\frac{\rho}{2} \|e\|_{P(\rho)} + \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ [a(\hat{z}) + b(\hat{z})u] - [a(z) + b(z)u] \end{bmatrix} \right\|_{P(\rho)} \quad (A6)$$

因为 $a(z)$ 和 $b(z)$ 是全局 Lipschitzian, 并且已假设输入 $u(t)$ 是一致有界的, 故必定有

$$\begin{aligned} & \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ [a(\hat{z}) + b(\hat{z})u] - [a(z) + b(z)u] \end{bmatrix} \right\|_{P(\rho)} \\ &= [([a(\hat{z}) + b(\hat{z})u] - [a(z) + b(z)u])^2 P_{nn}(\rho)]^{1/2} \\ &\leq k_1 \sqrt{P_{nn}(\rho)} \|e\|. \end{aligned} \quad (A7)$$

其中, k_1 为大于零的常数, $P_{nn}(\rho)$ 是 $P(\rho)$ 中的第 (n, n) 个元素, $\|e\| = \|\hat{z} - z\|$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 上的欧拉模。

把 (A7) 式代入 (A6) 式, 可得

$$\frac{d}{dt} \|e\|_{P(\rho)} \leq -\frac{\rho}{2} \|e\|_{P(\rho)} + k_1 \sqrt{P_{nn}(\rho)} \|e\|. \quad (A8)$$

因为由代数方程 (4) 可以得 (详细推导略):

$$P_{ij}(\rho) = (-1)^{i+j} \frac{m_{i-1,j} + m_{i,j-1}}{\rho^{i+j-1}}. \quad (A9)$$

其中, $i, j = 1, 2, \dots, n$, 且 $m_{0,j} = 0, m_{i,0} = 1, m_{i,j}$ 是正常数, $i \geq 1, j \geq 1$.

所以由 (A9) 式可得

$$P_{ij}(\rho) = \frac{P_{ij}(1)}{\rho^{i+j-1}}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (A10)$$

则由 (A9), (A10), 对于 $\rho \geq 1$, 可得

$$\begin{aligned} \sqrt{P_{nn}(\rho)} \|e\| &= \left(\frac{\|e\|^2}{\rho^{2n-1}} \right)^{1/2} \cdot \sqrt{P_{nn}(1)} \\ &\leq \left(k_2 \frac{\|e\|_{P(1)}^2}{\rho^{2n-1}} \right)^{1/2} \sqrt{m_{n,n}} \\ &\leq \sqrt{k_2 k_3} \|e\|_{P(\rho)} \sqrt{m_{n,n}}. \end{aligned} \quad (A11)$$

把 (A11) 式代入 (A8) 式, 则可得

$$\frac{d}{dt} \|e\|_{P(\rho)} \leq -\frac{\rho}{2} \|e\|_{P(\rho)} + k_1 \sqrt{k_2 k_3 m_{n,n}} \|e\|_{P(\rho)}. \quad (A12)$$

其中, $k_1, k_2, k_3, m_{n,n}$ 均是与参数 ρ 无关的正常数, k_3 的取值与系统阶数有关,

因此, 只要取足够大的正参数 ρ , 使得

$$k_4 = \frac{\rho}{2} - k_1 \sqrt{k_2 k_3 m_{n,n}} > 0. \quad (A13)$$

则

$$\frac{d}{dt} \|e\|_{P(\rho)} \leq -k_4 \|e\|_{P(\rho)}. \quad (A14)$$

即状态观测误差 $\|e\|_{P(\rho)}$ 将以 k_4 指数衰减收敛。证毕。

附录 B

由系统(2)的观测器(3)推导原系统(1)的观测器

考虑原系统(1)

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad (\text{B1})$$

$$y = h(x). \quad (\text{B2})$$

和非线性状态可逆变换

$$z = T(x), \quad x = T^{-1}(z). \quad (\text{B3})$$

可得

$$\frac{\partial T^{-1}(z)}{\partial z} \dot{z} = f(T^{-1}(z)) + g(T^{-1}(z))u, \quad (\text{B4})$$

即

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \left(\frac{\partial T^{-1}(z)}{\partial z} \right)^{-1} f(T^{-1}(z)) + \left(\frac{\partial T^{-1}(z)}{\partial z} \right)^{-1} g(T^{-1}(z))u \\ &= Az + \alpha(z) + \beta(z)u. \end{aligned} \quad (\text{B5})$$

由定理 1 知,系统(B5)的常增益渐近观测器为系统(3),故有

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}} &= \left(\frac{\partial T^{-1}(\hat{z})}{\partial \hat{z}} \right)^{-1} f(T^{-1}(\hat{z})) + \left(\frac{\partial T^{-1}(\hat{z})}{\partial \hat{z}} \right)^{-1} g(T^{-1}(\hat{z}))u \\ &\quad - P^{-1}(\rho)C^T(C\hat{z} - y), \end{aligned} \quad (\text{B6})$$

即

$$\left(\frac{\partial T^{-1}(\hat{z})}{\partial \hat{z}} \right) \dot{\hat{z}} = f(T^{-1}(\hat{z})) + g(T^{-1}(\hat{z}))u - \left(\frac{\partial T^{-1}(\hat{z})}{\partial \hat{z}} \right) P^{-1}(\rho)C^T(C\hat{z} - y), \quad (\text{B7})$$

即

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}) + g(\hat{x})u - \left(\frac{\partial T^{-1}(\hat{x})}{\partial \hat{x}} \right)^{-1} P^{-1}(\rho)C^T(h(\hat{x}) - y). \quad (\text{B8})$$

A State Observer Design Approach for Nonlinear Systems Based on State Transformation

SU Hongye, WANG Yang and CHU Jian

(Institute of Industrial Process Control, Zhejiang University · Hangzhou, 310027, PRC)

Abstract: The paper addresses a state observer design approach for a class of nonlinear systems. A nonlinear system transformation is applied to transform a complex single-input/single output nonlinear system into a simple nonlinear model. Then a stable state observer is introduced for the simple nonlinear model. The state observer to the primitive nonlinear system is derived via a state inverse transformation.

Key words: Affine nonlinear systems; state transformation; observability; state observer

本文作者简介

苏宏业 1969年生,1990年毕业于南京化工大学化工自动化专业,1993年获浙江大学工业自动化专业硕士学位,1995年获浙江大学工业自动化专业博士学位,现为浙江大学工业控制研究所副教授,研究兴趣是非线性系统控制理论与应用,时滞控制和鲁棒控制。

汪洋 1972年生,1993年毕业于浙江大学,获工学学士学位,1993年至今在浙江大学工业控制研究所攻读博士学位,研究兴趣是PID自整定研究,鲁棒控制等。

褚健 1963年生,1982年毕业于浙江大学,1986年~1989年留学日本京都大学,获工学博士学位,1993年被聘为浙江大学教授,博士生导师,现为工业自动化国家工程研究中心副主任,主要从事时滞系统控制,非线性控制,鲁棒控制等理论与应用研究。