第 14 卷第 6 期
1997 年 12 月
控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS
Vol. 14, No. 6
Dec., 1997

基于 Riccati-Itô 方程设计线性时滞系统鲁棒控制器的方法*

邓飞其　冯昭枢　刘永清
(华南理工大学自动控制工程系·广州, 510641)

摘要：利用 Riccati-Itô 型矩阵代数方程研究线性时不变系统的状态反馈镇定问题，对时滞系统给出了一种状态反馈镇定方法，这种镇定方法适应于许多时滞系统，其设计方案具有滞后无关性及对于许多系统滞后项系数任意性的完全适应性. 本文第二部分研究时不变线性不确定系统的鲁棒镇定，利用 Riccati-Itô 型矩阵代数方程给出了这类系统鲁棒镇定控制器的设计方法.

关键词：线性系统；时滞；镇定；鲁棒性；矩阵方程

1 引　言

系统控制器的设计方法依赖于所采用的数学理论. 例如，在时滞系统、不确定系统、随机系统、大系统的镇定控制器设计中，出现了许多 Riccati 型的矩阵方程、不等式，在这类方程与不等式中往往包含未知矩阵的范数、非线性项等[1]，这类方程正定解的存在性是未知的，缺乏理论基础，因而其相应的方法、结果在应用中受到局限. 有些文献(如[2])虽采用标准矩阵方程，但所给条件要求矩阵方程的解满足某些不等式，而这些不等式当不确定系数为零时也不一定能得到满足. 能否采用适当的技巧使得得到的矩阵方程变成规范的方程呢?本文研究线性时不变系统的状态反馈镇定问题，利用一定技巧导出一种矩阵方程，我们称为 Riccati-Itô 型矩阵代数方程，这种方程形如 Itô 型线性随机系统最优控制问题中出现的 Riccati 型矩阵代数方程，即型如 $A^{\mathrm T}P + PA - PBR^{-1}B^{\mathrm T}P + F_1^{\mathrm T}PF_1 + \cdots + F_m^{\mathrm T}PF_m = -Q$. 关于这类方程，已有一些经典结果可作参考，本文均假设所遇 Riccati-Itô 型矩阵代数方程的正定解是存在的. 除了采用 Riccati-Itô 型矩阵代数方程，本文定理中不再有别的不等式条件.

2 时不变线性时滞系统的反馈镇定

考虑时不变线性时滞系统

$$\dot{x} = Ax(t) + \sum_{i=1}^{m} A_i x(t-\tau_i) + Bu(t), \tag{1}$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^r, A, A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times r}, \tau_i = \mathrm{const} \geqslant 0, \tau_i \leqslant \tau, i = 1,2,\cdots,m$; m, n, r 为自然数. 下记 $C = C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$.

引理 1[3]　若 $X, Y \in \mathbb{R}^n, \gamma > 0, P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为正定或半正定矩阵，则有

$$2X^{\mathrm T}PY \leqslant rX^{\mathrm T}PX + r^{-1}Y^{\mathrm T}PY. \tag{2}$$

定理 1　若 (A, B) 可控，则状态反馈

$$u(t) = Kx(t), \quad K = -R^{-1}B^{\mathrm T}P \tag{3}$$

使(1)镇定. 其中 P 是 Riccati-Itô 型矩阵代数方程

$$(A+\lambda I)^{\mathrm T}P + P(A+\lambda I) - PBR^{-1}B^{\mathrm T}P + \sum_{i=1}^{m}\alpha A_i^{\mathrm T}PA_i + Q = 0 \tag{4}$$

的唯一对称正定解，R, Q 是任意给定的正定加权矩阵，$\alpha = m/(2\lambda), \lambda > 0$ 是可调参数.

---

* 国家自然科学基金、广东省自然科学基金、霍英东高校青年教师基金资助的项目.
本文于 1994 年 12 月 5 日收到. 1996 年 5 月 2 日收到修改稿.

证 定义 Lyapunov 泛函

$$V(\varphi)=\varphi^{\mathrm{T}}(0)P\varphi(0)+\sum_{i=1}^{m}\int_{-\tau_i}^{0}\alpha\varphi^{\mathrm{T}}(\theta)A_i^{\mathrm{T}}PA_i\varphi(\theta)\mathrm{d}\theta,\quad \varphi\in\mathbb{C},\tag{5}$$

则有 $k_1\|\varphi(0)\|^2\leqslant V(\varphi)\leqslant k_2|\varphi|^2$，其中 $k_1=\lambda_m(P)$，$k_2=[1+\sum_{i=1}^{m}\alpha\tau_i\|A_i\|^2]\|P\|$. 在本文中，$\lambda_m(\cdot)=\lambda_{\min}(\cdot)$，对向量，$\|\cdot\|$ 是 Euclid 范数，对矩阵，$\|\cdot\|$ 是谱范数或 Frobenuius 范数.

由引理 2，沿系统(1)，(3)之解有

$$\begin{aligned}\dot V(x_t)=&x^{\mathrm{T}}(t)(A^{\mathrm{T}}P+PA-2PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P+\sum_{i=1}^{m}\alpha A_i^{\mathrm{T}}PA_i)x(t)\\&+\sum_{i=1}^{m}2x^{\mathrm{T}}(t)PA_ix(t-\tau_i)-\sum_{i=1}^{m}\alpha x^{\mathrm{T}}(t-\tau_i)A_i^{\mathrm{T}}PA_ix(t-\tau_i)\end{aligned}\tag{6}$$

$$\begin{aligned}\dot V(x_t)\leqslant&x^{\mathrm{T}}(t)(A^{\mathrm{T}}P+PA-2PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P+2\lambda P+\sum_{i=1}^{m}\alpha A_i^{\mathrm{T}}PA_i)x(t)\\=&-2x^{\mathrm{T}}(t)Qx(t)-x^{\mathrm{T}}(t)PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}Px(t)\leqslant-\lambda_{\mathrm{m}}(Q)\|x(t)\|^2,\end{aligned}\tag{7}$$

由泛函微分方程基本稳定性定理([4]，P. 105，Th. 2. 1)，闭环系统(1)，(3)之平衡态渐近稳定.

证毕.

注 1 考虑 Itô 随机系统最优控制问题

$$\begin{cases}\mathrm{d}x(t)=[Ax(t)+Bu(t)]\mathrm{d}t+\sum_{i=1}^{m}\alpha^{\frac12}A_ix(t)\mathrm{d}W_i,\\ \mathrm{s.t.}\ \min J=\mathrm{E}\left[\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{2\lambda t}[x^{\mathrm{T}}(t)Qx(t)+u^{\mathrm{T}}Ru]\mathrm{d}t\right].\end{cases}\tag{8}$$

由随机系统理论[5,6]，(8)之解就是(3)，而 P 就是(4)之正定解. 这里 $W(t)=[W_1(t),W_2(t),\cdots,W_m(t)]^{\mathrm{T}}(t\geqslant0)$ 为 m 维标准 Wiener 过程.

注 2 定理 1 去掉了文[7]对滞后项系数的匹配性假设，而且由(3)给出的镇定方法是滞后无关的，即控制器(3)对时滞具有完全鲁棒性.

3 线性时不变系数不确定时滞系统的鲁棒镇定控制器设计

考虑线性时不变系数不确定时滞系统

$$\dot x=(A+\Delta A)x(t)+\sum_{i=1}^{m}(A_i+\Delta A_i)x(t-\tau_i)+Bu(t).\tag{9}$$

其中 x,u,A,A_i,B,τ_i 如上文所述；$\Delta A,\Delta A_i$ 为 $n\times n$ 不确定矩阵，可以是时变的；$\tau_i,i=1,2,\cdots,m$ 亦可以具有不确定性. 设

$$\begin{aligned}&\Delta A=[\Delta a_{kl}]_{n\times n},\quad \Delta A_i=[\Delta a_{ikl}]_{n\times n},\\&|\Delta a_{kl}|\leqslant\Theta_{kl},\ |\Delta a_{ikl}|\leqslant\Theta_{ikl};\ \Theta_{kl},\Theta_{ikl}=\mathrm{const.},\ i=1,2,\cdots,m;\ k,l=1,2,\cdots,n.\end{aligned}\tag{10}$$

定义(0－1)矩阵 $E_{kl}=[e_{ij}]_{n\times n}$，其中 $e_{kl}=1$，当 $(i,j)\neq(k,l)$ 时，$e_{ij}=0$；则有

$$\Delta A=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\Delta a_{kl}E_{kl},\Delta A_i=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\Delta a_{ikl}E_{kl}.$$

定义 Lyapunov 泛函 $V(\varphi)=V_1(\varphi)+V_2(\varphi)$，其中

$$V_1(\varphi)=\varphi^{\mathrm{T}}(0)P\varphi(0),$$

$$V_2(\varphi)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{\alpha}\Theta_{ikl}^2\int_{-\tau_i}^{0}\varphi^{\mathrm{T}}(\theta)E_{kl}^{\mathrm{T}}PE_{kl}\varphi(\theta)\mathrm{d}\theta+\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\beta}\int_{-\tau_i}^{0}\varphi^{\mathrm{T}}(\theta)A_i^{\mathrm{T}}PA_i\varphi(\theta)\mathrm{d}\theta,\quad\varphi\in\mathbb{C}.$$

可得到如下的定理 2.

定理 2　若(A,B)可控,则(9)由反馈律

$$u(t)=Kx(t),\quad K=-R^{-1}B^{\mathrm{T}}P \tag{11}$$

鲁棒镇定,其中 P 是 Riccati-Itô 型矩阵方程

$$\left[A+\frac{1}{2}n(n(n+1)\alpha+\beta)I\right]^{\mathrm{T}}P+P\left[A+\frac{1}{2}n(n(n+1)\alpha+\beta)I\right]-PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P+\frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\gamma_{kl}E_{kl}^{\mathrm{T}}PE_{kl}+\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{m}A_i^{\mathrm{T}}PA_i=-Q \tag{12}$$

的对称正定解,R,Q 是给定的加权矩阵,$\gamma_{kl}=\Theta_{kl}^2+\sum\limits_{i=1}^{m}\Theta_{ikl}^2$;$\alpha,\beta>0$ 是可调参数.

作为特例,考察系统

$$\dot{x}=(A+\Delta A)x+Bu. \tag{13}$$

其中 $A,B,\Delta A$ 如上所述.由定理 2 有如下的

推论　若(A,B)可控,则(13)由反馈律 $u=Kx(t),K=-R^{-1}B^{\mathrm{T}}P$ 镇定,其中 P 是 Riccati-Itô 型方程

$$\left(A+\frac{1}{2}n^2\alpha I\right)^{\mathrm{T}}P+P\left(A+\frac{1}{2}n^2\alpha I\right)-PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P+\frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\Theta_{kl}^2E_{kl}^{\mathrm{T}}PE_{kl}=-Q \tag{14}$$

的正定解.

4　非线性不确定系统的鲁棒镇定

考虑非线性不确定系统

$$\dot{x}(t)=(A+\Delta A)x(t)+\sum_{i=1}^{m}(A_i+\Delta A_i)x(t-\tau_i)+Bu(t)+f(t,x_t). \tag{15}$$

其中 $A,A_i,B,\Delta A,\Delta A_i,\tau_i$ 如上文所述,f 是不确定泛函,满足

$$\|f(t,\varphi)\|^2\leqslant\sum_{v=1}^{N}\theta_v\|\varphi(-\sigma_v)\|^2,\quad \varphi\in\mathbb{C}, \tag{16}$$

其中 $\theta_v,\sigma_v=\text{const.}\geqslant 0$.

定义 Lyapunov 泛函 $V_e=V+V_3$,其中 V 如上,

$$V_3=\frac{1}{\gamma}\mathrm{Tr}(P)\sum_{v=1}^{N}\theta_v\int_{-\sigma_v}^{0}\|\varphi(\theta)\|^2\mathrm{d}\theta,$$

可得到如下的定理 3.

定理 3　若(A,B)可控,则(15)由反馈律 $u=Kx(t),K=-R^{-1}B^{\mathrm{T}}P$ 镇定,其中 P 是 Riccati-Itô 型矩阵方程

$$\left[A+\frac{1}{2}n(n(n+1)\alpha+\beta)I\right]^{\mathrm{T}}P+P\left[A+\frac{1}{2}n(n(n+1)\alpha+\beta)I\right]-PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P+\frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\gamma_{kl}E_{kl}^{\mathrm{T}}PE_{kl}+\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{m}A_i^{\mathrm{T}}PA_i+\gamma P+\frac{1}{\gamma}\sum_{v=1}^{N}\theta_v\mathrm{Tr}(P)I=-Q \tag{17}$$

的正定解,R,Q,γ_{kl} 如上所述,$\alpha,\beta,\gamma>0$ 是可调参数.

5　例　　子

例　设在系统(18)中,$n=2,A=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\Delta A=\Theta I_2,(\Theta\geqslant 0)$.

显然(A,B)可控.视(15)为(9)的特例,$\Delta Ax(t)$ 视为 $\Delta Ax(t-0)$,于(12)中置 $\gamma_{kl}=0,m=1,A_1=\Theta I,\alpha=0$,则(12)成为

$$\left(A+\left(\beta+\frac{1}{2\beta}\Theta^2\right)I\right)^{\mathrm{T}}P+P\left(A+\left(\beta+\frac{1}{2\beta}\Theta^2\right)I\right)-PBR^{-1}BTP=-Q, \tag{18}$$

$\forall\ \Theta>0$,(18) 有对称正定解,而 $u=-R^{-1}B^{\mathrm{T}}Px(t)$ 是系统的稳定控制器.

参 考 文 献

1 田连江,高为炳,程勉.线性时滞不确定系统的鲁棒性研究.控制理论与应用,1993,10(6):718—723

2 曹登庆.不确定线性时滞系统的镇定.控制与决策,1995,10(2):153—157

3 刘永清.冯昭枢.大型动力系统的理论与应用,卷 4:随机·稳定与控制.广州:华南理工大学出版社,1992

4 Hale,J,K.. Theory of Functional Differential Equations. New York: Springer-Verlag, 1977

5 Arnold, L.. Stochastic Differential Equations: Theory and Applications. New York: Wiley, 1974

6 Willems, J. L. and Willems, J. C.. Feedback stabilizability for stochastic systems with state and control dependent noise. Automatica, 1976, 12: 277—283

7 杨保民,孙明,孙翔.滞后不确定系统的鲁棒稳定调节器设计.自动化学报,1994,20(2):202—207

8 刘永清,唐功友.大型动力系统的理论与应用,卷 3:滞后·稳定与控制.广州:华南理工大学出版社,1992

A Design Method of Robust Controllers of Linear Delay Systems Based on Riccati-Itô Equations

DENG Feiqi, FENG Zhaoshu and LIU Yongqing

(Department of Automatic Control Engineering, South China University of Technology · Guangzhou, 510641, PRC)

Abstract: In this paper, the stabilization problem of linear time-invariant systems by state feedback is investigated via algebraic matrix equations of Riccati-Itô type. A stabilization method by state feedback for delay systems is given, which is adapted to many delay systems, the design scheme is independent of the delays, and completely adapted to the arbitrarity of coefficients of retarded terms in the systems in many cases. In the second part of the paper, the robust stabilization of time-invariant linear uncertain systems is investigated, a designing method of robust controllers is given via matrix equations of Riccati-Itô type.

Key words: linear system; delay; stabilization; robustness; matrix equation

本文作者简介

邓飞其 见本刊 1997 年第 2 期第 259 页.

冯昭枢 见本刊 1997 年第 2 期第 259 页.

刘永清 见本刊 1997 年第 1 期第 33 页.