具有结构不确定性系统的鲁棒 H_∞ 控制*

杨富文

(福州大学电气工程系·福州,350002)

摘要：本文研究具有结构不确定性系统的鲁棒 H_∞ 状态反馈控制问题，这个问题的解涉及到一个代数 Riccati 方程. 通过分析，这个问题的解与一个辅助的线性时不变系统的 H_∞ 状态反馈控制问题的解是等价的. 把这一结果用于求解具有结构不确定性系统的鲁棒 H_∞ 动态输出反馈控制问题，很方便地给出只需求解两个代数 Riccati 方程的鲁棒 H_∞ 动态输出反馈控制问题的解.

关键词：鲁棒 H_∞ 状态反馈控制；鲁棒 H_∞ 动态输出反馈控制；鲁棒稳定性；代数 Riccati 方程；结构不确定性系统；辅助的线性时不变系统

1 引　　言

控制系统设计中最关心的是系统的稳定性和性能. 众所周知，不确定性会破坏系统的稳定性和性能，而系统不确定性是不可避免的，在实际系统中由于建模的误差以及系统工作环境的变化都会带来不确定因素.

H_∞ 优化控制正是为解决这些不确定性系统而提出的一种设计方法. 在近十几年来，H_∞ 优化控制主要是研究外界干扰对系统影响最小问题即干扰抑制问题[1,2]以及具有非结构不确定性系统的鲁棒稳定性问题[3]. 这两类问题都可以归结为标准 H_∞ 控制问题[4,5]，即设计一控制器使闭环传递函数的 H_∞ 范数小于某一给定界 γ，它可以用常规的 H_∞ 优化方法来求解，也就是求解两个代数 Riccati 方程即可获得标准 H_∞ 控制问题的解[5].

对于具有结构(参数)不确定性系统的 H_∞ 控制问题，既要使得闭环传递函数的 H_∞ 范数小于某一给定界 γ，而且还要保证所设计的控制器使整个具有结构不确定性闭环系统是稳定的. 因此研究具有结构不确定性系统 H_∞ 控制问题的难度大为增加. 对于状态完全可得的结构不确定性系统，文献[6]采用鲁棒 H_∞ 状态反馈控制给出只需求解一个代数 Riccati 方程就可得到其状态反馈阵. 对于状态不完全可得的结构不确定性系统，必须采用动态输出反馈控制，但常规的求解方法(如分离定理)不再适用，因此必须寻找一种新的方法来求解. 本文首先研究状态完全可得的结构不确定性系统的鲁棒 H_∞ 状态反馈控制问题. 这个问题的解只涉及到一个代数 Riccati 方程. 因此求解具有结构不确定性系统的 H_∞ 状态反馈控制问题可以等价为求解一个辅助的线性时不变系统的 H_∞ 状态反馈控制问题. 然后把这一结果用于求解状态不完全可得的结构不确定性系统的鲁棒 H_∞ 动态输出反馈控制问题，同样可以把求解具有结构不确定性系统的鲁棒 H_∞ 动态输出反馈控制问题转化为求解一个辅助的线性时不变系统的 H_∞ 动态输出反馈控制问题[7,8]. 这个问题即为标准 H_∞ 控制问题，因此只需求解两个代数 Riccati 方程即可得到具有结构不确定性系统的鲁棒 H_∞ 动态输出反馈控制器.

2 鲁棒 H_∞ 状态反馈控制

考虑状态完全可得的结构不确定性系统

* 福建省自然科学基金资助项目(F97009).
本文于 1996 年 2 月 6 日收到. 1996 年 10 月 21 日收到修改稿.

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + B_1w(t) + B_2u(t), \tag{2.1a}$$

$$z(t) = C_1x(t) + D_{12}u(t), \tag{2.1b}$$

$$y(t) = x(t). \tag{2.1c}$$

其中 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 为状态向量，$w(t) \in \mathbb{R}^{m_1}$ 为干扰输入向量，$u(t) \in \mathbb{R}^{m_2}$ 为控制输入向量，$z(t) \in \mathbb{R}^{p_1}$ 为误差向量，A, B_1, B_2, C_1, D_{12} 为已知矩阵，ΔA 为结构不确定性，它可以表示为

$$\Delta A = \sum_{i=1}^{k} G_i L_i H_i. \tag{2.2}$$

式中 $G_i \in \mathbb{R}^{n\times r_i}$ 和 $H_i \in \mathbb{R}^{r_i\times n}$ 为已知矩阵，$L_i \in \mathbb{R}^{r_i\times r_i}$ 为不确定性的未知矩阵，但

$$\begin{bmatrix} L_1^{\mathrm{T}}L_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & L_k^{\mathrm{T}}L_k \end{bmatrix} \leqslant \varepsilon^2 I.$$

对于结构不确定性系统(2.1)，采用状态反馈控制

$$u(t) = F_\infty x(t). \tag{2.3}$$

则闭环系统为

$$\dot{x}(t) = (A_{F_\infty} + \sum_{i=1}^{k} G_i L_i H_i)x(t) + B_1 w(t), \tag{2.4a}$$

$$z(t) = C_{1F_\infty} w(t). \tag{2.4b}$$

式中 $A_{F_\infty} = A + B_2F_\infty, C_{1F_\infty} = C_1 + D_{12}F_\infty$.

定理 2.1 对于系统(2.1)，假设 (A, B_2) 可稳，若采用状态反馈控制(2.3)，且存在正定阵 $X_\infty > 0$ 满足下列代数 Riccati 方程：

$$A_{F_\infty}^{\mathrm{T}} X_\infty + X_\infty A_{F_\infty} + \frac{1}{\gamma^2} X_\infty B_1 B_1^{\mathrm{T}} X_\infty + C_{1F_\infty}^{\mathrm{T}} C_{1F_\infty} + X_\infty G G^{\mathrm{T}} X_\infty + \varepsilon^2 H^{\mathrm{T}} H < 0. \tag{2.5}$$

式中

$$F_\infty = - B_2^{\mathrm{T}} X_\infty, \tag{2.5a}$$

$$G = [G_1 \quad G_2 \quad \cdots \quad G_k], \tag{2.5b}$$

$$H = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_k \end{bmatrix}. \tag{2.5c}$$

则 1) $\| C_{1F_\infty}(sI - A_{F_\infty} - \Delta A)^{-1} B_1 \|_\infty < \gamma$;

2) 闭环矩阵 $A_{F_\infty} + \Delta A$ 稳定.

在证明定理 2.1 之前，首先引入两个引理.

引理 2.1[6] 对于任意适当维数的矩阵 X, Y 有

$$X^{\mathrm{T}}Y + Y^{\mathrm{T}}X \leqslant X^{\mathrm{T}}X + Y^{\mathrm{T}}Y.$$

引理 2.2[7,9] 设代数 Lyapunov 方程为

$$A^{\mathrm{T}}X + XA + C^{\mathrm{T}}C = 0.$$

1) 若 (C, A) 可检测，而且解 $X > 0$，则 A 是稳定的.

2) 若 (C, A) 可观测，且 A 稳定，则 $X > 0$.

定理 2.1 的证明 由式(2.5)有

$$(A_{F_\infty} + \Delta A)^{\mathrm{T}} X_\infty + X_\infty (A_{F_\infty} + \Delta A) + \frac{1}{r^2} X_\infty B_1 B_1^{\mathrm{T}} X_\infty$$

$$+ C_{1F_\infty}^{\mathrm{T}} C_{1F_\infty} + X_\infty G G^{\mathrm{T}} X_\infty + \varepsilon^2 H^{\mathrm{T}} H - \Delta A^{\mathrm{T}} X_\infty - X_\infty \Delta A < 0. \tag{2.6}$$

根据引理 2.1 有

$$\begin{aligned}\Delta A^{\mathrm{T}} X_\infty + X_\infty \Delta A &= \sum_{i=1}^{k} H_i^{\mathrm{T}} L_i^{\mathrm{T}} G_i^{\mathrm{T}} X_\infty + X_\infty \sum_{i=1}^{k} G_i L_i H_i \\ &\leqslant X_\infty G G^{\mathrm{T}} X_\infty + H^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} L_1^{\mathrm{T}} L_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & L_k^{\mathrm{T}} L_k \end{bmatrix} H \\ &\leqslant X_\infty G G^{\mathrm{T}} X_\infty + \varepsilon^2 H^{\mathrm{T}} H. \end{aligned} \tag{2.7}$$

把上述不等式(2.7)代入(2.6)有

$$(A_{F_\infty} + \Delta A)^{\mathrm{T}} X_\infty + X_\infty (A_{F_\infty} + \Delta A) + \frac{1}{\gamma^2} X_\infty B_1 B_1^{\mathrm{T}} X_\infty + C_{1F_\infty}^{\mathrm{T}} C_{1F_\infty} < 0. \tag{2.8}$$

对于上式存在一个 $Q > 0$ 使得下列等式成立

$$-Q = (A_{F_\infty} + \Delta A)^{\mathrm{T}} X_\infty + X_\infty (A_{F_\infty} + \Delta A) + \frac{1}{\gamma^2} X_\infty B_1 B_1^{\mathrm{T}} X_\infty + C_{1F_\infty}^{\mathrm{T}} C_{1F_\infty}. \tag{2.9}$$

上式(2.9)改写为

$$\begin{aligned} C_{1F_\infty}^{\mathrm{T}} C_{1F_\infty} &= -Q - \frac{1}{\gamma^2} X_\infty B_1 B_1^{\mathrm{T}} X_\infty - (A_{F_\infty} + \Delta A)^{\mathrm{T}} X_\infty - X_\infty (A_{F_\infty} + \Delta A) \\ &= [-sI - (A_{F_\infty} + \Delta A)^{\mathrm{T}}] X_\infty + X_\infty [sI - (A_{F_\infty} + \Delta A)] \\ &\quad - \frac{1}{\gamma^2} X_\infty B_1 B_1^{\mathrm{T}} X_\infty - Q. \end{aligned} \tag{2.10}$$

因此

$$\begin{aligned} &\gamma^2 I - [C_{1F_\infty}(-sI - A_{F_\infty} - \Delta A)^{-1} B_1]^{\mathrm{T}} [C_{1F_\infty}(sI - A_{F_\infty} - \Delta A)^{-1} B_1] \\ &= \gamma^2 I - B_1^{\mathrm{T}} [-sI - (A_{F_\infty} + \Delta A)^{\mathrm{T}}]^{-1} C_{1F_\infty}^{\mathrm{T}} C_{1F_\infty} [sI - (A_{F_\infty} + \Delta A)]^{-1} B_1. \end{aligned} \tag{2.11}$$

把式(2.10)代入式(2.11)有

$$\begin{aligned} &\gamma^2 I - [C_{1F_\infty}(-sI - A_{F_\infty} - \Delta A)^{-1} B_1]^{\mathrm{T}} [C_{1F_\infty}(sI - A_{F_\infty} - \Delta A)^{-1} B_1] \\ &= \gamma^2 I - B_1^{\mathrm{T}} X_\infty [sI - (A_{F_\infty} + \Delta A)]^{-1} B_1 - B_1^{\mathrm{T}} [-sI - (A_{F_\infty} + \Delta A)^{\mathrm{T}}]^{-1} X_\infty B_1 \\ &\quad + B_1^{\mathrm{T}} [-sI - (A_{F_\infty} + \Delta A)^{\mathrm{T}}]^{-1} \left(\frac{1}{\gamma^2} X_\infty B_1 B_1^{\mathrm{T}} X_\infty + Q\right) [sI - (A_{F_\infty} + \Delta A)]^{-1} B_1 \\ &= \gamma^2 I - B_1^{\mathrm{T}} X_\infty \left(\frac{1}{\gamma^2} X_\infty B_1 B_1^{\mathrm{T}} X_\infty + Q\right)^{-1} X_\infty B_1 + G^{\mathrm{T}}(-s) G(s). \end{aligned} \tag{2.12}$$

式中

$$\begin{aligned} G(s) &= \left(\frac{1}{\gamma^2} X_\infty B_1 B_1^{\mathrm{T}} X_\infty + Q\right)^{\frac{1}{2}} [sI - (A_{F_\infty} + \Delta A)]^{-1} B_1 \\ &\quad - \left(\frac{1}{\gamma^2} X_\infty B_1 B_1^{\mathrm{T}} X_\infty + Q\right)^{-\frac{1}{2}} X_\infty B_1. \end{aligned} \tag{2.12a}$$

显然，式(2.12) 中的 $\gamma^2 I - B_1^{\mathrm{T}} X_\infty \left(\frac{1}{\gamma^2} X_\infty B_1 B_1^{\mathrm{T}} X_\infty + Q\right)^{-1} X_\infty B_1 > 0$，故对于所有的 ω，$\gamma^2 I - [C_{1F_\infty}(j\omega I - A_{F_\infty} - \Delta A)^{-1} B_1]^* [C_{1F_\infty}(j\omega I - A_{F_\infty} - \Delta A)^{-1} B_1] > 0$，即 $\| C_{1F_\infty}(sI - A_{F_\infty} - \Delta A)^{-1} B_1 \|_\infty < \gamma$，$*$ 为共轭转置.

另外 $Q > 0$，故 $\frac{1}{\gamma^2} X_\infty B_1 B_1^{\mathrm{T}} X_\infty + C_{1F_\infty}^{\mathrm{T}} C_{1F_\infty} + Q > 0$. 根据式(2.9) 和引理 2.2 可知，当 X_∞

>0 时，$A_{F_\infty}+\Delta A$ 是稳定的，故定理 2.1 得证.

以上给出状态完全可得的结构不确定性系统的鲁棒 H_∞ 状态反馈控制. 为了把这一结果用于研究状态不完全可得的结构不确定性系统的鲁棒 H_∞ 动态输出反馈控制问题，下面来讨论鲁棒 H_∞ 状态反馈控制的一些性质，给出两个重要定理.

定理 2.2 下列两个条件是等价的：

1) $A+B_2F_\infty$ 稳定，且 $\left\|\begin{bmatrix}C_{1F_\infty}\\ \varepsilon H\end{bmatrix}(sI-A_{F_\infty})^{-1}[B_1\quad \gamma G]\right\|_\infty<\gamma$； (2.13)

2) 存在一个正定阵 $X_\infty>0$ 满足下列代数 Riccati 方程：

$$A_{F_\infty}^{\mathrm{T}}X_\infty+X_\infty A_{F_\infty}+\frac{1}{\gamma^2}X_\infty B_1B_1^{\mathrm{T}}X_\infty+C_{1F_\infty}^{\mathrm{T}}C_{1F_\infty}+X_\infty GG^{\mathrm{T}}X_\infty+\varepsilon^2H^{\mathrm{T}}H<0, \tag{2.14}$$

式中 $F_\infty=-B_2^{\mathrm{T}}X_\infty$.

证 1)⇒2)：因 $\left\|\begin{bmatrix}C_{1F_\infty}\\ \varepsilon H\end{bmatrix}(sI-A_{F_\infty})^{-1}[B_1\quad \gamma G]\right\|_\infty<\gamma$，故对于所有 $s=j\omega$ 有

$$\gamma^2I-\begin{bmatrix}B_1^{\mathrm{T}}\\ \gamma G^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}[-sI-A_{F_\infty}^{\mathrm{T}}]^{-1}\left[\begin{bmatrix}C_{1F_\infty}\\ \varepsilon H\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}C_{1F_\infty}\\ \varepsilon H\end{bmatrix}\right](sI-A_{F_\infty})^{-1}[B_1\quad \gamma G]>0.$$

因此存在一个充分小 $\delta>0$ 使下式成立：

$$I-\begin{bmatrix}\frac{1}{\gamma}B_1^{\mathrm{T}}\\ G^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}[-sI-A_{F_\infty}^{\mathrm{T}}]^{-1}\left[\begin{bmatrix}C_{1F_\infty}\\ \varepsilon H\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}C_{1F_\infty}\\ \varepsilon H\end{bmatrix}+\delta I\right](sI-A_{F_\infty})^{-1}\left[\frac{1}{\gamma}B_1\quad G\right]>0.$$

因 A_{F_∞} 稳定，故 $\left(A_{F_\infty},\ \left[\frac{1}{\gamma}B_1\quad G\right]\right)$ 是可稳的，又因 $\begin{bmatrix}C_{1F_\infty}\\ \varepsilon H\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}C_{1F_\infty}\\ \varepsilon H\end{bmatrix}+\delta I>0$，故 $\left(\left[\begin{bmatrix}C_{1F_\infty}\\ \varepsilon H\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}C_{1F_\infty}\\ \varepsilon H\end{bmatrix}+\delta I\right]^{\frac{1}{2}},A_{F_\infty}\right)$ 是可观测的. 根据文献[10]引理5存在一个实对称矩阵 X_∞ 使得

$$A_{F_\infty}^{\mathrm{T}}X_\infty+X_\infty A_{F_\infty}+X_\infty\left[\frac{1}{\gamma}B_1\quad G\right]\begin{bmatrix}\frac{1}{\gamma}B_1^{\mathrm{T}}\\ G^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}X_\infty+\begin{bmatrix}C_{1F_\infty}\\ \varepsilon H\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}C_{1F_\infty}\\ \varepsilon H\end{bmatrix}+\delta I=0.$$

上式可以重写为

$$A_{F_\infty}^{\mathrm{T}}X_\infty+X_\infty A_{F_\infty}+\frac{1}{\gamma^2}X_\infty B_1B_1^{\mathrm{T}}X_\infty+X_\infty GG^{\mathrm{T}}X_\infty+C_{1F_\infty}^{\mathrm{T}}C_{1F_\infty}+\varepsilon^2H^{\mathrm{T}}H+\delta I=0.$$

因 $\frac{1}{\gamma^2}X_\infty B_1B_1^{\mathrm{T}}X_\infty+X_\infty GG^{\mathrm{T}}X_\infty+C_{1F_\infty}^{\mathrm{T}}C_{1F_\infty}+\varepsilon^2H^{\mathrm{T}}H+\delta I>0$，且 A_{F_∞} 稳定，根据引理 2.2 有 $X_\infty>0$，故存在一个正定阵 $X_\infty>0$ 使得 $A_{F_\infty}^{\mathrm{T}}X_\infty+X_\infty A_{F_\infty}+\frac{1}{\gamma^2}X_\infty B_1B_1^{\mathrm{T}}X_\infty+C_{1F_\infty}^{\mathrm{T}}C_{1F_\infty}+X_\infty GG^{\mathrm{T}}X_\infty+\varepsilon^2H^{\mathrm{T}}H<0$.

2)⇒1)：根据式(2.14)存在一个 $Q>0$ 使得下列等式成立：

$$-Q=A_{F_\infty}^{\mathrm{T}}X_\infty+X_\infty A_{F_\infty}+\frac{1}{\gamma^2}X_\infty B_1B_1^{\mathrm{T}}X_\infty+C_{1F_\infty}^{\mathrm{T}}C_{1F_\infty}+X_\infty GG^{\mathrm{T}}X_\infty+\varepsilon^2H^{\mathrm{T}}H. \tag{2.15}$$

上式可以重写为

$$\begin{bmatrix}C_{1F_\infty}\\ \varepsilon H\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}C_{1F_\infty}\\ \varepsilon H\end{bmatrix}=-A_{F_\infty}^{\mathrm{T}}X_\infty-X_\infty A_{F_\infty}-\frac{1}{\gamma^2}X_\infty B_1B_1^{\mathrm{T}}X_\infty-X_\infty GG^{\mathrm{T}}X_\infty-Q$$

$$=[-sI-A_{F_\infty}^{\mathrm{T}}]X_\infty+X_\infty[sI-A_{F_\infty}]-\frac{1}{\gamma^2}X_\infty B_1B_1^{\mathrm{T}}X_\infty-X_\infty GG^{\mathrm{T}}X_\infty-Q.$$

根据上式有

$$\gamma^2I-\begin{bmatrix}B_1^{\mathrm{T}}\\ \gamma G^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}(-sI-A_{F_\infty}^{\mathrm{T}})^{-1}\left[\begin{bmatrix}C_{1F_\infty}\\ \varepsilon H\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}C_{1F_\infty}\\ \varepsilon H\end{bmatrix}\right](sI-A_{F_\infty})^{-1}[B_1\quad \gamma G]$$

$$=\gamma^2I-\begin{bmatrix}B_1^{\mathrm{T}}\\ \gamma G^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}X_\infty(sI-A_{F_\infty})^{-1}[B_1\quad \gamma G]-\begin{bmatrix}B_1^{\mathrm{T}}\\ \gamma G^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}(-sI-A_{F_\infty}^{\mathrm{T}})^{-1}X_\infty[B_1\quad \gamma G]$$

$$+\begin{bmatrix}B_1^{\mathrm{T}}\\ \gamma G^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}(-sI-A_{F_\infty}^{\mathrm{T}})^{-1}\left(\frac{1}{\gamma^2}X_\infty B_1B_1^{\mathrm{T}}X_\infty+X_\infty GG^{\mathrm{T}}X_\infty+Q\right)(sI-A_{F_\infty})^{-1}[B_1\quad \gamma G]$$

$$=\gamma^2I-\begin{bmatrix}B_1^{\mathrm{T}}\\ \gamma G^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}X_\infty\left(\frac{1}{\gamma^2}X_\infty B_1B_1^{\mathrm{T}}X_\infty+X_\infty GG^{\mathrm{T}}X_\infty+Q\right)^{-1}X_\infty[B_1\quad \gamma G]+G^{\mathrm{T}}(-s)G(s).\tag{2.16}$$

式中

$$G(s)=\left(\frac{1}{\gamma^2}X_\infty B_1B_1^{\mathrm{T}}X_\infty+X_\infty GG^{\mathrm{T}}X_\infty+Q\right)^{\frac{1}{2}}(sI-A_{F_\infty})^{-1}[B_1\quad \gamma G]$$

$$-\left(\frac{1}{\gamma^2}X_\infty B_1B_1^{\mathrm{T}}X_\infty+X_\infty GG^{\mathrm{T}}X_\infty+Q\right)^{-\frac{1}{2}}X_\infty[B_1\quad \gamma G].\tag{2.16a}$$

显然，式(2.16)中的 $\gamma^2I-\begin{bmatrix}B_1^{\mathrm{T}}\\ \gamma G^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}X_\infty\left(\frac{1}{\gamma^2}X_\infty B_1B_1^{\mathrm{T}}X_\infty+X_\infty GG^{\mathrm{T}}X_\infty+Q\right)^{-1}X_\infty[B_1\quad \gamma G]>0$，

故对于所有的 ω，$\gamma^2I-\begin{bmatrix}B_1^{\mathrm{T}}\\ \gamma G^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}(-j\omega I-A_{F_\infty}^{\mathrm{T}})^{-1}\begin{bmatrix}C_{1F_\infty}\\ \varepsilon H\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}C_{1F_\infty}\\ \varepsilon H\end{bmatrix}(j\omega I-A_{F_\infty})^{-1}[B_1\quad \gamma G]>0$，

即

$$\left\|\begin{bmatrix}C_{1F_\infty}\\ \varepsilon H\end{bmatrix}(sI-A_{F_\infty})^{-1}[B_1\quad \gamma G]\right\|_\infty<\gamma.$$

另外 $Q>0$，故 $\frac{1}{\gamma^2}X_\infty B_1B_1^{\mathrm{T}}X_\infty+C_{1F_\infty}^{\mathrm{T}}C_{1F_\infty}+X_\infty GG^{\mathrm{T}}X_\infty+\varepsilon^2H^{\mathrm{T}}H+Q>0$，根据式(2.15)和引理 2.2 可知，当 $X_\infty>0$ 时，$A+B_2F_\infty$ 是稳定的. 故定理 2.2 得证.

定理 2.3　对于系统(2.1)，若 A_{F_∞} 稳定，且

$$\left\|\begin{bmatrix}C_{1F_\infty}\\ \varepsilon H\end{bmatrix}(sI-A_{F_\infty})^{-1}[B_1\quad \gamma G]\right\|_\infty<\gamma,\tag{2.17}$$

则 $A_{F_\infty}+\sum_{i=1}^{k}G_iL_iH_i$ 稳定，且 $\|C_{1F_\infty}(sI-A_{F_\infty}-\sum_{i=1}^{k}G_iL_iH_i)^{-1}B_1\|<\gamma$.

证　由定理 2.1 和定理 2.2 可以直接获得.

由定理 2.2 和定理 2.3 可知，只要求解辅助的线性时不变系统 $\tilde{G}(s)=\begin{bmatrix}C_{1F_\infty}\\ \varepsilon H\end{bmatrix}(sI-A_{F_\infty})^{-1}[B_1\quad \gamma G]$ 的 H∞ 控制问题，即可求出结构不确定性系统 $\hat{G}(s)=C_{1F_\infty}(sI-A_{F_\infty}-\sum_{i=1}^{k}G_iL_iH_i)^{-1}B_1$ 的鲁棒 H∞ 控制问题. 这个结论很重要，可以推广到下节求解结构不确定性系统的鲁棒 H∞ 动态输出反馈控制问题.

3　鲁棒 H∞ 动态输出反馈控制

考虑状态不完全可得的结构不确定性系统

$$\dot{x}(t)=(A+\Delta A)x(t)+B_1w(t)+B_2u(t), \tag{3.1a}$$

$$z(t)=C_1x(t)+D_{12}u(t), \tag{3.1b}$$

$$y(t)=C_2x(t)+D_{21}w(t). \tag{3.1c}$$

其中
$$\Delta A=\sum_{i=1}^{k}G_iL_iH_i. \tag{3.1d}$$

假设采用严格真的动态输出反馈控制器,其状态方程可表示为

$$\dot{x}_c(t)=A_cx_c(t)+B_cy(t), \tag{3.2a}$$

$$u(t)=C_cx_c(t). \tag{3.2b}$$

则闭环系统的状态方程表示为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{x}_c(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A+\Delta A & B_2C_c\\ B_cC_2 & A_c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ x_c(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_1\\ B_cD_{21}\end{bmatrix}w(t), \tag{3.3a}$$

$$z(t)=[C_1\quad D_{12}C_c]\begin{bmatrix}x(t)\\ x_c(t)\end{bmatrix}. \tag{3.3b}$$

令
$$\hat{x}(t)=\begin{bmatrix}x(t)\\ x_c(t)\end{bmatrix},\quad \hat{A}=\begin{bmatrix}A & B_2C_c\\ B_cC_2 & A_c\end{bmatrix},$$

$$\hat{B}=\begin{bmatrix}B_1\\ B_cD_{21}\end{bmatrix},\quad \hat{C}=[C_1\quad D_{12}C_c].$$

则式(3.3)可以重写为

$$\dot{\hat{x}}(t)=(\hat{A}+\hat{G}_iL_i\hat{H}_i)\hat{x}(t)+\hat{B}w(t), \tag{3.4a}$$

$$z(t)=\hat{C}\hat{x}(t). \tag{3.4b}$$

式中 $\hat{G}_i=\begin{bmatrix}G_i\\ 0\end{bmatrix}$, $\hat{H}_i=[H_i\quad 0]$.

令
$$\hat{G}=[\hat{G}_1\quad \hat{G}_2\quad \cdots\quad \hat{G}_k]=\begin{bmatrix}G\\ 0\end{bmatrix}, \tag{3.5a}$$

$$\hat{H}=\begin{bmatrix}\hat{H}_1\\ \hat{H}_2\\ \vdots\\ \hat{H}_k\end{bmatrix}=[H\quad 0]. \tag{3.5b}$$

因此对于结构不确定系统(3.4),根据定理2.3有下列定理成立.

定理3.1 对于系统(3.4),若 $\hat{A}$ 稳定,且 $\left\|\begin{bmatrix}\hat{C}\\ \varepsilon\hat{H}\end{bmatrix}(sI-\hat{A})^{-1}[\hat{B}\quad \gamma\hat{G}]\right\|_\infty<\gamma$ 则 $\hat{A}+\sum_{i=1}^{k}\hat{G}_iL_i\hat{H}_i$ 稳定,且 $\|\hat{C}(sI-\hat{A}-\sum_{i=1}^{k}\hat{G}_iL_i\hat{H}_i)^{-1}\hat{B}\|_\infty<\gamma$.

证 比较采用状态反馈控制的闭环系统(2.4)和采用动态输出反馈控制的闭环系统(3.4),这里的 $\hat{C}$ 对应于式(2.17)的 C_{1F_∞},$\hat{B}$ 对应于式(2.17)的 B_1,$\hat{A}$ 对应于式(2.17)的 A_{F_∞},$\hat{H}$ 对应于式(2.17)的 H,$\hat{G}$ 对应于式(2.17)的 G. 因此根据定理2.3,定理3.1得证.

定理3.1把求解具有结构不确定性系统的鲁棒 H_∞ 动态输出反馈控制问题转化为求解一个辅助的线性时不变系统的 H_∞ 动态输出反馈控制问题. 下面定理给出 $\hat{A}$ 稳定且 $\left\|\begin{bmatrix}\hat{C}\\ \varepsilon\hat{H}\end{bmatrix}\right\|(sI-\hat{A})^{-1}[\hat{B}\quad \gamma\hat{G}]\|_\infty<\gamma$ 的充分必要条件.

定理 3.2 存在一个控制器(3.2)使得 $\hat{A}$ 稳定且 $\left\|\begin{bmatrix}\hat{C}\\ \varepsilon\hat{H}\end{bmatrix}(sI-\hat{A})^{-1}[\hat{B}\quad \gamma\hat{G}]\right\|_\infty<\gamma$ 的充分必要条件是

1) 存在正定矩阵 $X_\infty>0$ 满足下列代数 Riccati 方程：

$$(A+B_2F_\infty)^{\mathrm{T}}X_\infty+X_\infty(A+B_2F_\infty)+\frac{1}{\gamma^2}X_\infty B_1B_1^{\mathrm{T}}X_\infty$$
$$+(C_1+D_{12}F_\infty)^{\mathrm{T}}(C_1+D_{12}F_\infty)+X_\infty GG^{\mathrm{T}}X_\infty+\varepsilon^2H^{\mathrm{T}}H<0. \tag{3.6}$$

式中 $F_\infty=-B_2^{\mathrm{T}}X_\infty$.

2) 存在正定矩阵 $Y_\infty>0$ 满足下列代数 Riccati 方程：

$$(A+H_\infty C_2)Y_\infty+Y_\infty(A+H_\infty C_2)^{\mathrm{T}}+\frac{1}{\gamma^2}Y_\infty C_1^{\mathrm{T}}C_1Y_\infty$$
$$+(B_1+H_\infty D_{21})(B_1+H_\infty D_{21})^{\mathrm{T}}+\frac{\varepsilon^2}{\gamma^2}Y_\infty H^{\mathrm{T}}HY_\infty+\gamma^2GG^{\mathrm{T}}<0, \tag{3.7}$$

式中 $H_\infty=-Y_\infty C_2^{\mathrm{T}}$.

3)
$$\gamma^2Y_\infty^{-1}>X_\infty. \tag{3.8}$$

此外,满足上述条件的一个控制器为

$$C_c=F_\infty, \tag{3.9a}$$
$$B_c=-(I-\gamma^{-2}Y_\infty X_\infty)^{-1}H_\infty, \tag{3.9b}$$
$$A_c=A+B_2C_c-B_cC_2-(\gamma^2Y_\infty^{-1}-X_\infty)^{-1}M, \tag{3.9c}$$

式中

$$M=C_c^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}}X_\infty+C_c^{\mathrm{T}}D_{12}^{\mathrm{T}}(C_1+D_{12}C_c)+\frac{1}{\gamma^2}(\gamma^2Y_\infty^{-1}-X_\infty)[(B_cD_{21}-B_1)B_1^{\mathrm{T}}-\gamma^2GG^{\mathrm{T}}]X_\infty$$
$$-(A+B_2F_\infty)^{\mathrm{T}}X_\infty-X_\infty(A+B_2F_\infty)-\frac{1}{\gamma^2}X_\infty B_1B_1^{\mathrm{T}}X_\infty$$
$$-(C_1+D_{12}F_\infty)^{\mathrm{T}}(C_1+D_{12}F_\infty)-X_\infty GG^{\mathrm{T}}X_\infty-\varepsilon H^{\mathrm{T}}H.$$

证
$$\begin{bmatrix}\hat{C}\\ \varepsilon\hat{H}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_1 & D_{12}C_c\\ \varepsilon H & 0\end{bmatrix}=\left[\begin{bmatrix}C_1\\ \varepsilon H\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D_{12}\\ 0\end{bmatrix}C_c\right],$$
$$(\hat{B}\quad \gamma\hat{G})=\begin{bmatrix}B_1 & \gamma G\\ B_cD_{21} & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}[B_1\quad \gamma G]\\ B_c[D_{21}\quad 0]\end{bmatrix},$$
$$\hat{A}=\begin{bmatrix}A & B_2C_c\\ B_cC_i & A_c\end{bmatrix}.$$

根据文献[8]的定理 1 和推论 1,定理 3.2 得证.

定理 3.3 若存在正定阵 $X_\infty>0,Y_\infty>0$ 满足(3.6)和(3.7)且 $\gamma^2Y_\infty^{-1}>X_\infty$,则具有结构不确定性的闭环系统矩阵 $\hat{A}+\sum_{i=1}^{k}\hat{G}_iL_i\hat{H}_i$ 稳定,且 $\|\hat{C}(sI-\hat{A}-\sum_{i=1}^{k}\hat{G}_iL_i\hat{H}_i)^{-1}\hat{B}\|_\infty<\gamma$. 此外,动态输出反馈控制器满足式(3.9).

证　由定理 3.1 和定理 3.2,可直接获得.

4 结　论

本文给出了具有结构不确定性系统的鲁棒 H_∞ 状态反馈控制问题和鲁棒 H_∞ 动态输出反馈控制问题的解,它们与线性时不变系统的 H_∞ 状态反馈控制问题和 H_∞ 动态输出反馈控制问题的解所不同之处是在代数 Riccati 方程中加入结构不确定性矩阵的一些信息. 因此整个求解

过程与线性时不变系统的 H_∞ 控制问题的求解是一样的.

参考文献

1 Zames, G.. Feedback and optimal sensitivity: model reference transformations, multiplicative seminorms and approximate inverses. IEEE Trans. Automat. Contr., 1981, AC-26(2): 301—320

2 Vidyasagar, M.. Control System Synthesis: A Factorization Approach. Cambridge, MA: MIT Press, 1985

3 Kimura, H.. Robust stabilization for a class of transfer functions. IEEE Trans. Automat. Contr., 1984, AC-29(9): 788—793

4 Francis, B. A. and Doyle, J. C.. Linear control theory with an H^∞ optimal criterion. SIAM J. Control and Optimization, 1987, 25(4): 815—844

5 Doyle, J. C., Glover, K., Khargonegar, P. and Francis, B. A.. State-space solution to standard H_2 and H_∞ control problem. IEEE Trans. Automat. Contr., 1989, AC-34(8): 831—847

6 杨富文. 具有参数不确定性和外干扰系统的鲁棒 H_∞ 状态反馈控制. 控制理论与应用, 1993, 10(6): 698—702

7 杨富文. 求一类 H^∞ 控制最优值的非迭代算法. 自动化学报, 1994, 20(4): 482—486

8 Sampei, M., Mita, T. and Nakamichi, M.. An algebraic approach to H^∞ output feedback control problems. Systems and Control Letters, 1990, 14(1): 13—24

9 [日]须田信英等著, 曹长修译. 自动控制中的矩阵理论. 北京: 科学出版社, 1979

10 Willems, J. C.. Least squares stationary optimal control and the algebraic Riccati equation. IEEE Trans. Automat. Contr., 1971, AC-16(6): 621—634

Robust H_∞ Control for Systems with Structured Uncertainty

YANG Fuwen

(Department of Electrical Engineering, Fuzhou University · Fuzhou, 350002, PRC)

Abstract: This paper investigates robust H_∞ state feedback control problem for the systems with structured uncertainty. The solution to this problem involves one algebraic Riccati equation. Through analysis it is shown that the solution to this problem is equivalent to the solution to H_∞ state feedback control problem for auxiliary linear time-invariant systems. Applied this result to robust H_∞ dynamic output feedback control problem for the systems with structured uncertainty, it is easy to get the solution to robust H_∞ dynamic output feedback problem, which involves solving two algebraic Riccati equation.

Key words: robust H_∞ state feedback control; robust H_∞ dynamic output feedback control; robust stability; algebraic Riccati equation; systems with structured uncertainty; auxiliary linear time-invariant systems

本文作者简介

杨富文 1963年生. 1990年在华中理工大学自动控制系获博士学位, 现为福州大学电气工程系教授. 在 H_∞ 优化控制方面发表学术论文二十余篇. 目前的主要研究方向是 H_∞ 优化控制, 不确定性系统的鲁棒分析与设计以及工程应用研究.