第 15 卷第 1 期　　控制理论与应用　　Vol. 15, No. 1
1998 年 2 月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　Feb., 1998

最小阶输出反馈镇定控制器设计*

曹永岩　孙优贤

(浙江大学工业控制技术研究所・杭州, 310027)

摘要: 本文首先基于逆 LQG 方法得到了静态输出反馈可镇定的一种充要条件,并进一步给出了固定阶输出反馈可镇定的充要条件和控制器的设计方法,基于此给出了一种最小阶镇定控制器的设计方法. 这些条件的形式比较简单,判断其可镇定性和设计镇定控制器仅需解几个相应的矩阵不等式.

关键词: 镇定; 逆 LQG; 矩阵不等式; 输出反馈; 线性系统

1 引　言

线性系统的低阶与最小阶镇定是控制理论与应用中的一个重要课题. 在所有满足给定性能指标的控制器中,我们通常希望得到最小阶控制器,因为最小阶控制器不仅容易实现,而且计算速度快;稳定性是控制系统的最基本的要求,自然解决最小阶镇定问题在控制理论与应用中具有重要的意义. 这一问题已经得到了许多的研究,但至今仍未解决[1~3]. 一般来说,给定对象的不稳定极点越多,所要求的镇定控制器的阶数就越高,另外这些极点的位置在最小阶镇定问题中也要起重要作用,它主要与对象的不稳定和微衰减极点(unstable and lightlydamped poles)的数目与位置有关.

2 输出反馈的可镇定条件

考虑 n 阶线性时不变(LTI)动态系统:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx. \tag{1}$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^l$ 分别表示状态向量,输入向量和输出向量, A, B, C 分别表示合适维数的常矩阵. 令 E_i 表示关于 $\mathrm{Im}C^{\mathrm{T}}$ 的投影矩阵,即

$$E_i = C^+ C. \tag{2}$$

显然若有 C 满秩,则有 $E_i = C^{\mathrm{T}}(CC^{\mathrm{T}})^{-1}C$, 不失一般性,本文假定 C 满秩.

引理 1[5,6]　LTI 系统(1)可状态反馈镇定当且仅当如下等价条件之一成立

1) 存在合适维数的矩阵 $Q > 0, R > 0$, 使得如下代数 Riccati 方程(ARE)存在唯一解 $P > 0$.

$$PA + A^{\mathrm{T}}P - PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P + Q = 0. \tag{3}$$

2) 存在合适维数的对称正定矩阵 $P > 0, R > 0$ 满足如下代数 Riccati 不等式(ARI).

$$PA + A^{\mathrm{T}}P - PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P < 0. \tag{4}$$

并且 $K = -R^{-1}B^{\mathrm{T}}P$ 是一镇定的状态反馈增益.

下面我们考虑具有交叉项的 LQ 控制问题

$$v(x_0) = \int_0^\infty (x^{\mathrm{T}}Qx + 2u^{\mathrm{T}}Sx + u^{\mathrm{T}}Ru)\mathrm{d}t.. \tag{5}$$

式中 $Q > 0, R > 0, S$ 是满足如下约束的合适维数的常矩阵

$$Q - S^{\mathrm{T}}R^{-1}S > 0. \tag{6}$$

* 国家自然科学基金资助项目(69604007).
本文于 1996 年 2 月 5 日收到. 1997 年 3 月 3 日收到修改稿.

由文[6]可知，关于(1)，(5)，(6)的LQ控制问题的解为

$$u = -Kx, \quad K = R^{-1}(B^{\mathrm{T}}P + S),$$

$$PA + A^{\mathrm{T}}P - (B^{\mathrm{T}}P + S)^{\mathrm{T}}R^{-1}(B^{\mathrm{T}}P + S) + Q = 0. \tag{7}$$

引理 2 给定LTI系统(1)，该系统可状态反馈镇定当且仅当如下等价条件之一成立

1) 存在合适维数的对称矩阵 $Q > 0, R > 0$ 使得满足不等式(6)的ARE(7)存在唯一解 $P > 0$.

2) 存在合适维数的对称矩阵 $P > 0, R > 0$ 满足如下具有交叉项ARI

$$PA + A^{\mathrm{T}}P - (B^{\mathrm{T}}P + S)^{\mathrm{T}}R^{-1}(B^{\mathrm{T}}P + S) + S^{\mathrm{T}}R^{-1}S < 0. \tag{8}$$

并且 $K = -R^{-1}(S + B^{\mathrm{T}}P)$ 是一镇定的状态反馈增益.

证 由引理1，我们知道若 (A,B) 可状态反馈镇定则存在合适的矩阵 $R > 0, Q_1 > 0$ 使得ARE

$$PA + A^{\mathrm{T}}P - PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P + Q_1 = 0.$$

存在唯一对称正定解 $P > 0$，由于 $Q_1 > 0$，我们总可找到 S 使得

$$Q_1 + PBR^{-1}S + S^{\mathrm{T}}R^{-1}B^{\mathrm{T}}P > 0. \tag{9}$$

例如，令 $S = \lambda S_0, S_0 = [I_m \quad 0_{n-m}]$，如果

$$|\lambda| < \frac{\sigma_{\min}(Q_1)}{\sigma_{\min}(PBR^{-1}S_0 + S_0^{\mathrm{T}}R^{-1}B^{\mathrm{T}}P)},$$

则一定有不等式(9)成立. 定义

$$Q = Q_1 + PBR^{-1}S + S^{\mathrm{T}}R^{-1}B^{\mathrm{T}}P + S^{\mathrm{T}}R^{-1}S,$$

因此有 $Q > 0, Q - S^{\mathrm{T}}R^{-1}S > 0$，并且ARE(7)成立. 反过来，注意到ARE(7)可以写为

$$P(A - BR^{-1}S) + (A - BR^{-1}S)^{\mathrm{T}}P - PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P + Q - S^{\mathrm{T}}R^{-1}S = 0.$$

由于 $Q - S^{\mathrm{T}}R^{-1}S > 0$，由引理1可知 (A,B) 可镇定. 证毕.

定义允许输出反馈集合 Ξ 和允许状态反馈集合 Ψ：

$\Xi = \{F \in \mathbb{R}^{m\times l} | A - BFC$ 渐近稳定$\}$， $\Psi = \{K \in \mathbb{R}\backslash\%^{m\times n} | \mathrm{A} - \mathrm{BK}$ 渐近稳定$\}$.

令 $Y \in \mathbb{R}^{n\times n-l}$ 表示 C 的零空间的直交基，即 $CY = 0, Y^{\mathrm{T}}Y = I$. 显然，对于给定的 C，存在 $F \in \Xi$ 当且仅当存在 $K \in \Psi$ 并且 $KY = 0$.

引理 3 给定LTI系统(1)，一定有如下结论成立

1) $\Xi \neq \varnothing$ 当且仅当 $\Psi_0 = \Psi \cap \{K | KY = 0\} \neq \varnothing$.

2) 如果 $\Psi_0 \neq \varnothing$，即存在一静态输出反馈镇定控制器 F，那么所有静态输出反馈镇定控制器 $F \in \Xi$ 具有如下参数化形式

$$F = KPC^{\mathrm{T}}(CPC^{\mathrm{T}})^{-1}.$$

式中 $K \in \Psi_0$，P 为一合适维数的任意对称正定矩阵.

证 1)的必要性可直接由定义 $K = FC$ 得到. 仅需证明1)和2)的充分性. 由于系统(1)可静态输出反馈镇定，因而对于任一给定的 $K \in \Psi_0$，$K = FC$ 一定可解. 因为，矩阵 $V = [PC^{\mathrm{T}}, Y]$ 非奇异，即其秩为 n. 在 $K = FC$ 两边右乘 V，即可得到上式. 证毕.

定理 1 LTI系统(1)可静态输出反馈镇定当且仅当如下等价条件之一成立

1) 存在对称矩阵 $Q > 0, R > 0$，以及合适维数的常矩阵 M 使得如下ARE

$$A^{\mathrm{T}}P + PA - E_iM^{\mathrm{T}}R^{-1}ME_i + Q = 0, \tag{10}$$

$$Q - S^{\mathrm{T}}R^{-1}S > 0, \quad S = ME_i - B^{\mathrm{T}}P \tag{11}$$

存在唯一解 $P > 0$.

2) 存在矩阵 $P>0, R>0$，以及合适维数的常矩阵 M 满足如下具有合适交叉项的 ARI

$$A^{\mathrm{T}}P + PA - E_iM^{\mathrm{T}}R^{-1}ME_i + S^{\mathrm{T}}R^{-1}S < 0, \tag{12}$$

并且 $F = R^{-1}MC^{+}$ 是一镇定的输出反馈增益.

证　充分性. 不难发现 ARE(10)可写为

$$P(A - BR^{-1}S) + (A - BR^{-1}S)^{\mathrm{T}}P - PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P + Q - S^{\mathrm{T}}R^{-1}S = 0.$$

由最优控制理论可知[6]，若上式存在一组合适的解则状态反馈

$$K = R^{-1}(S + B^{\mathrm{T}}P) = R^{-1}ME_i = FC$$

镇定系统(1).

必要性. 假定系统(1)可静态输出反馈镇定，那么一定存在增益矩阵 K 和 $P>0$ 使得

$$x^{\mathrm{T}}[(A+BK)^{\mathrm{T}}P + P(A+BK)]x < 0, \quad \forall\, x \neq 0.$$

不失一般性，假定 K 可描述为 $K = ME_i$，其中 M 为一合适维数的矩阵，因此上式等价于

$$x^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}P + PA)x < 0, \quad \forall\, x \in \mathrm{Ker}(K), \quad x \neq 0.$$

定义
$$\alpha^* = \max_x \left\{ \frac{x^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}P + PA)x}{x^{\mathrm{T}}(E_iM^{\mathrm{T}}ME_i)x} \right\}, \quad \forall\, x \notin \mathrm{Ker}(ME_i),$$

由文[4]，一定有 $\alpha^* < \infty$ 即 α^* 一定有界. 因为 $K = ME_i$，因此对于任意 $\alpha > \max(0, \alpha^*)$，有

$$x^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}P + PA)x < \alpha x^{\mathrm{T}}(E_iM^{\mathrm{T}}ME_i)x, \quad \forall\, x \neq 0.$$

选择对称正定矩阵 R 使得 $R^{-1} \geqslant \alpha I$，我们就有

$$x^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}P + PA)x < x^{\mathrm{T}}(E_iM^{\mathrm{T}}R^{-1}ME_i)x, \quad \forall\, x \neq 0,$$

即
$$A^{\mathrm{T}}P + PA - E_iM^{\mathrm{T}}R^{-1}ME_i < 0.$$

这就意味着合适维数 $Q>0$ 满足矩阵方程(10). 显然矩阵方程(10)可以写为 ARE(7)，由引理 2，不等式(11)亦是一必要条件.　　证毕.

文[7]也用此方法对静态输出反馈问题进行了研究，但仅研究开环传递函数 $C(sI - A)^{-1}B$ 稳定且 $\det(CB) \neq 0$ 这一特殊情况. 实际上由定理 1 可直接得到该文中的结论. 这种逆 LQG 方法研究静态输出反馈可镇定的一个最大优点就是可以直接与系统的性能指标挂钩，对系统的性能指标进行分析.

我们知道，静态输出反馈可镇定的系统有限，而且通常不能兼顾到系统的性能指标，因此不得不使用动态补偿的办法，也就是要求设计合适的动态输出反馈控制器

$$\dot{x}_c = A_cx_c + B_cy, \quad u = C_cx_c + D_cy. \tag{13}$$

其中 $x_c \in \mathbb{R}^{n_c}$，A_c, B_c, C_c, D_c 分别表示合适维数的待确定的常矩阵，n_c 表示控制器的阶. 此时闭环系统为

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BD_cC & BC_c \\ B_cC & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix} = (A_t + B_tK_cC_t) \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix}.$$

式中
$$A_t = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_t = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & I_{n_c} \end{bmatrix}, \quad C_t = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I_{n_c} \end{bmatrix}, \quad F_c = \begin{bmatrix} D_c & C_c \\ B_c & A_c \end{bmatrix}.$$

定理 2　LTI 系统(1)可 n_c 阶动态输出反馈镇定当且仅当存在对称正定矩阵 P_t, R_t，以及合适维数常矩阵 M_t 满足如下具有合适交叉项的 ARI

$$A_t^{\mathrm{T}}P_t + P_tA_t - \hat{E}_iM_t^{\mathrm{T}}R_t^{-1}M_t\hat{E}_i + S_t^{\mathrm{T}}R_t^{-1}S_t < 0. \tag{14}$$

式中 $\hat{E}_i = C_t^{+}C_t$，$S_t = M_t\hat{E}_i - B_t^{\mathrm{T}}P_t$，并且 $F_c = R_t^{-1}M_tC_t^{+}$ 是一镇定的输出反馈增益.

因此，系统(1) 的输出反馈镇定控制器的设计可以通过逐步增加控制器的阶解矩阵不等式(14) 得到其满足给定性能指标的镇定控制器，我们知道 n 阶有理正则系统的最小阶输出反

馈镇定控制器的阶的上界为 $n-1$，因此这种方法可以得到阶数小于等于 $n-1$ 的输出反馈镇定控制器.

考虑不稳定系统 $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$，$C=[I \quad a]$，不难发现当 $a>0$ 时该系统可静态输出反馈镇定，而 $a<0$ 则该系统不可静态输出反馈镇定. 当 $a=1$ 时，取

$$M=[2 \quad 2],\quad R=1,\quad S=[0 \quad 1.5],\quad P=\begin{bmatrix}2 & 0.5\\ 0.5 & 1\end{bmatrix}>0,\quad Q=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}>0$$

时 ARE(10)及不等式(11)成立. 因此 $F=2$ 是一镇定的静态输出反馈增益. 实际上此时闭环系统 $A-BFC$ 的特征值为 -1，-1.

3 结束语

本文基于逆 LQG 方法给出了静态输出反馈和固定阶输出反馈镇定控制器的存在条件. 不等式(12)，(14)是两二次矩阵不等式，我们可以使用迭代线性矩阵不等式方法求其解.

参 考 文 献

1 Smith, M. C.. On minimal order stabilization of single loop plants. Systems and Control Letters, 1986, 7(1): 39—40

2 Gu, D. W. and Postlewaite, I.. Low-order stabilizing controllers. IEEE Trans. Automat. Contr., 1993, AC-38(11): 1713—1717

3 Wang, Q. G., Lee, T. H. and He, J. B.. Towards minimal-order stabilizers for all pole plants. Preprint of the 13rd IFAC World Control Conference, 1996

4 Cheng, D. and Martin, C. F.. Boundaries of conditional quadratic forms——a comment on "Stabilization via static output feedback". IEEE Trans. Automat. Contr., 1995, AC-40(3): 500—502

5 Boyd, S. et al.. Linear matrix inequalities in system and control theory. SIAM, Philadelphia, 1994

6 Anderson, B. D. O. and Moore, J. B.. Linear Optimal Control. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1971

7 Gu, G.. On the existence of linear optimal control with output feedback. SIAM J. Contr. Optimiz., 1990, 711—719

The Design of the Minimal-Order Stabilizers

CAO Yongyan and SUN Youxian

(Institute of Industrial Process Control, Zhejiang University · Hangzhou, 310027, PRC)

Abstract: In this paper, first based on the inverse LQG method, a stabilizability condition via static output feedback for linear time-invariant systems is gained, then a necessary and sufficient stabilizability condition and the design method for fixed-order output feedback are derived. Then a design method of the minimal-order stabilizers is provided. All this conditions are very simple and only some matrix inequalities need to be solved to judge its stabilizability and to design the stabilizers.

Key words: stabilization; inverse LQG; matrix inequality; output feedback; linear system

本文作者简介

曹永岩 1968年生. 于1993年在武汉钢铁学院获工学硕士学位，1996年3月在浙江大学获工学博士学位. 现在浙江大学工业控制技术研究所做博士后研究. 主要感兴趣的研究领域：大系统理论及应用，鲁棒控制理论及应用，容错控制理论及应用，静态输出反馈镇定等.

孙优贤 1940年生. 教授，博士生导师，中国工程院院士，现任浙江大学控制工程科学研究院院长，工业控制研究所所长. 1984年至1987年获德国洪堡奖学金. 长期从事过程控制，鲁棒控制理论及应用，H_∞控制理论应用，容错控制理论及应用研究以及造纸过程模型化和计算机控制. 发表论文300多篇，著作10余本，获各类科技进步将20多项.