第 15 卷第 1 期
1998 年 2 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 15, No. 1
Feb., 1998

矩阵重特征值的一种计算方法*

叶庆凯

(北京大学力学系·北京,100871)

摘要:结合多项式方法和 QR 方法各自的特点,提出了一种计算矩阵重特征值的方法.给出了用 Borland C++语言编制的程序源码.计算数例表明,在有重特征值的情况下,用本文给出的方法所求得结果的精度明显优于用 MATLAB 4.0 和 MATHEMATICA 所求得的结果.

关键词:重特征值;特征多项式;QR 方法

1 引言

在工程应用中,矩阵的特征值问题越来越受到重视.在不存在重特征值的情况下,已有多种方法可求出矩阵的特征值,并研制了已广泛使用的商品软件.例如,EISPACK,MATLAB 和 MATHEMATICA 等.但是,由于这些软件都基于 QR 迭代算法,原则上说不适用于重特征值的计算.在这些软件中,当有重特征值时,只能采用摄动将重特征值问题转换为无重特征值问题,但求解精度大大下降.

在用 QR 方法求解特征值之前,人们用的是求矩阵的特征多项式的根的方法.这种方法可以方便地处理有重特征值的情况,但总的求解精度较低.

本文将这两种方法结合起来,用特征多项式求根方法确定重根,而用 QR 迭代方法来求单根.计算数例表明,在有重根的情况下,本文的方法可以取得较好的结果.

2 基本原理

1) 一个矩阵的特征值即它的特征多项式的根.

2) 一个多项式的重根由它和它的导数多项式的最大公因式决定[1].

3) 对于无重根的多项式,可以构成它的伴矩阵,用 QR 方法得到该矩阵的特征值即原多项式的根[2].

3 计算步骤

1) 给定要求特征值的矩阵 A.

2) 确定矩阵 A 的特征多项式 $f(s) = |sI - A|$.

3) 求 $f(s)$ 的导数多项式 $g(s)$.

4) 求 $f(s)$ 和 $g(s)$ 的最大公因式 $d(s)$,并计算 $f(s)$ 除以 $d(s)$ 的商 $c(s)$.

5) 构成 $c(s)$ 的伴矩阵 B.

6) 用 QR 迭代方法确定 B 的特征值,它们都是单特征值.

7) 对 $d(s)$ 重复 3) ~ 6).

4 程序实现

我们在 windows 环境下用 Borlabd C++ 4.5 程序语言编写了求矩阵特征值的函数段.这里我们使用了北京大学力学系研制的线性代数库(lb.dll)和多项式库(poly.dll).

---

* 国家自然科学基金资助项目(69574001).高等学校博士学科点专项基金资助项目.
本文于 1996 年 9 月 2 日收到.

```
c Array multiEigen(Matrix& A)
  {
    int j;
    cArray eig (A.getR()),sc;                              //说明复矢量
    Polynomial C,s=polySignal(),CDiff,CD,CF;               //说明多项式
    C=(s*eyePlMatrix(A.getR())-p1Matrix(A)).det();         //计算特征多项式|sI − A|
    for(j=0;j<A.getR();)
        {
          CDiff=C.diff();                                  //确定导数多项式 CDiff
          CD=C.mcd(CDiff);                                 //确定最大公因式 CD
          CF=C.div(CD);                                    //求 C 除以 CD 的商 CF
          sc=CF.roots();                                   //用 QR 方法求 CF 的根
          eig.setInitial(j+1);                             //将所求得的根放入复矢量
                                                             eig 中

          eig==sc;
          j+=sc.getL();                                    //累计求得的根的数目
          C=CD;
        }
    return eig;
  }
```

5 数值例子

设有矩阵

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1.4641 & -5.324 & -7.26 & -4.4 \end{bmatrix},$$

它的四个特征值是−1.1,−1.1,−1.1,−1.1.即有四重根−1.1.

用 MATLAB 4.0 求得的结果是 − 1.10021606638619,− 1.09999998140107 + 0.00021604778527i,−1.09999998140107−0.00021604778527i,−1.09978397081167.

用 MATHEMATICA 求得的结果是 − 1.10022,− 1.1 + 0.000221996i,− 1.1 − 0.000221996i,−1.09978.

用本文给出的函数段,求得的结果是−1.1+j0,−1.1+j0,−1.1+j0,−1.1+j0.它们与理论值相同,精度明显优于 MATLAB 和 MATHEMATICA.

6 结 论

1) 本文结合特征多项式方法和 QR 迭代方法,给出了求矩阵重特征值的方法.数例表明,在矩阵有重特征值的情况下,其精度明显优于目前流行的软件工具 MATLAB 4.0 和 MATHEMATICA.

2) 本文讨论的是矩阵的重特征值,结果显然可用于求多项式的重根.

3) 本文只讨论了确定矩阵重特征值的方法.如何计算对应于这些重特征值的特征矢量还在探讨之中.

4）在存在重特征值的情况下，计算矩阵的若当标准形的方法还在探讨之中.

参考文献

1 黄琳.系统与控制理论中的线性代数.北京：科学出版社，1984
2 叶庆凯.控制系统计算机辅助设计.北京：北京大学出版社，1990

The Calculation of Multiple Eigenvalues for Matrix

YE Qingkai
(Mechanics Department, Peking University · Beijing, 100871, PRC)

Abstract: There are two kinds of method to calculate the eigenvalues of a matrix: characteristic polynomial method and QR method. In this paper, we combine with these two methods to provide a new method, which can obtain the multiplex eigenvalues. The programming, written by Borland C++, is given. The numerical example shows, if the matrix has multiplex eigenvalues, our method is better than MATLAB or MATHEMATICA.

Key words: multiplex eigenvalue; characteristic polynomial; QR method

本文作者简介

叶庆凯 1939年生.北京大学力学与工程科学系教授，博士生导师.1962年毕业于北京大学数学力学系.目前主要研究兴趣为控制系统计算机辅助设计，优化与最优控制中的计算方法等.