滞后线性定常广义不确定系统的变结构控制设计*

温香彩　　　刘永清　丘水生
(河南师范大学数学系·河南新乡,453002)　(华南理工大学电子与信息学院·广州,510641)

摘要：本文首次引入了滞后广义系统的受限等价分解形式,利用滞后正常系统的理论和无滞后广义系统的理论,研究了滞后线性定常广义系统的变结构控制设计问题. 所提供的研究方法为进一步研究滞后广义系统的其它问题(例如调节、跟踪)开创了一条新的途径.

关键词：滞后系统；广义系统；变结构控制

1 引　言

在涉及到线性过程的许多应用中,都存在有滞后影响,即事物的发展趋势不仅依赖于当前的状态,而且还依赖于事物的过去历史. 其原因就在于实际系统变量的测量、设备的各种物理性质以及信号的采集、处理和传递等多方面的因素均可导致输出响应相对于输入的时间滞后现象. 一般情况下,滞后经常产生于电子、机械、经济系统及空间中的电磁雷达和计算机的视象表层处理等现象中. 对滞后正常系统,研究历史虽已有三十年,但稳定性、镇定性理论仍处于初创阶段. 对滞后广义系统,研究几乎处于空白. 文[1]曾对解的存在性、唯一性问题进行了研究,给出了初始函数相容条件及解的形式表达式. 对稳定性、镇定性问题很少见到有关报道. 本文首先通过一坐标变换,把滞后广义系统解耦成它的受限等价分解形式:一个与控制无关的滞后正常子系统和一个与控制有关的低阶滞后广义子系统. 然后通过引入动态补偿器,把所研究的滞后广义系统综合问题化为滞后正常子系统和无滞后广义子系统的综合问题.

2 预备知识

考虑滞后线性定常广义系统

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Cx(t-\tau) + Bu(t) + Df(x,t), \tag{1}$$

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0]. \tag{2}$$

这里 $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ 分别为 t 时刻系统的状态向量和控制向量, $f(x,t) \in \mathbb{R}^l$ 为系统的不确定量. E, A, B, C 和 D 为相容维数的常矩阵. $\varphi(t)$ 为系统在$[-\tau,0]$上给定的相容有界连续初始函数, $\tau > 0$ 为时间滞后, $\mathrm{rank}E = r < n$. 本文不考虑解的存在性和唯一性,总假定所研究的系统解存在且唯一. 本文的向量范数为欧氏范数,即 $\|x\| = (x^{\mathrm{T}}x)^{1/2}$. 作如下假设：

假设 1　$\mathrm{rank}(E,B) = n$, B 列满秩.

假设 2　$\mathrm{rank}(D,B) = \mathrm{rank}B$, $\|Df(x,t)\| \leqslant h(x,t)$, $h(x,t)$ 为已知函数.

引理 1　在假设 1 和 2 的条件下,存在可逆矩阵 M 和 N, 使系统(1)、(2)受限制等价于

$$\dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t) + C_{11}x_1(t-\tau) + C_{12}x_2(t-\tau), \tag{3}$$

$$\begin{aligned} E_2\dot{x}_2(t) = {} & A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t) + C_{21}x_1(t-\tau) \\ & + C_{22}x_2(t-\tau) + B_2u(t) + D_2f(x_1,x_2,t), \end{aligned} \tag{4}$$

$$x_1(t) = \phi_1(t), \quad x_2(t) = \phi_2(t), \quad t \in [-\tau, 0]. \tag{5}$$

---

* 国家自然科学基金和国家博士后基金资助项目(69574009).
本文于 1995 年 9 月 4 日收到. 1997 年 4 月 11 日收到修改稿.

这里 $x_1(t) \in \mathbb{R}^{n-m}, x_2(t) \in \mathbb{R}^m$,

$$x(t) = N\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad MEN = \begin{bmatrix} I_{n-m} & 0 \\ 0 & E_2 \end{bmatrix}, \quad MAN = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad MCN = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix},$$

$$MB = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad MD = \begin{bmatrix} 0 \\ D_2 \end{bmatrix}, \quad N^{-1}\phi(t) = \begin{bmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{bmatrix}, \quad t \in [-\tau, 0].$$

证　与 $\tau = 0$ 时证明类似,详证略(参见[2]).

3　主要结果

由引理1知,(1)(2)的控制设计问题可转化为(3)～(5)的控制设计问题.利用变结构控制研究(3)～(5)的综合设计问题可分为两步:第一步设计切换函数使系统的轨道在切换流形上渐近稳定;第二步设计变结构控制律使系统在此控制作用下,在流形外的运动于有限时刻 T 到达此流形,实现滑动模运动.下面分别进行设计:

3.1　切换函数的选取

定理1　对系统(3)～(5),如果存在矩阵 $K_1 \in \mathbb{R}^{m\times(n-m)}$ 使

$$\lambda_{\min}(Q) > 2\alpha e^{\beta\tau} \| (C_{11} + C_{12}K_1)^{\mathrm{T}} P \|, \tag{6}$$

则存在切换函数

$$s(t) = K_1 x_1(t) + E_2 x_2(t) + \xi(t),$$

$$\begin{aligned} \dot{\xi} = &- (E_2K_1A_{11} + K_2K_1 + K_1A_{11})x_1(t) \\ &- (E_2K_1A_{12} - K_2 + K_1A_{12})x_2(t) - (E_2 + I_m)K_1[C_{11}x_1(t-\tau) + C_{12}x_2(t-\tau)], \end{aligned}$$

在切换流形 $S = 0$ 上,系统最终渐近稳定.这里 P 为 Lyapunov 矩阵方程

$$(A_{11} + A_{12}K_1 + \beta I_{n-m})^{\mathrm{T}} P + P(A_{11} + A_{12}K_1 + \beta I_{n-m}) = -Q$$

的对称正定解矩阵,$\beta > 0$,Q 为某对称正定矩阵,$\alpha = (\dfrac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)})^{1/2}$,$K_2$ 满足

$$\sigma(E_2, K_2) \subset \{\lambda: \mathrm{Re}\lambda < -\gamma, \gamma > 0\}, \quad \deg\det(\lambda E_2 - K_2) = \operatorname{rank} E_2. \tag{7}$$

证　在切换流形 $S=0$ 上,由 $\dot{S}=0$ 得等效控制 $u_{eq} = -B_2^{-1}(A_{21} - E_2K_1A_{11} - K_2K_1)x_1(t) + D_2 f(x_1, x_2, t) + (A_{22} - E_2K_1A_{12} + K_2)x_2(t) + (C_{21} - E_2K_1C_{11})x_1(t-\tau) + (C_{22} - E_2K_1C_{12})x_2(t-\tau)]$. 理想滑动模运动方程为(3)及 $E_2(\dot{x}_2(t) - K_1\dot{x}_1(t)) = K_2(x_2(t) - x_1(t))$. 引入变量 $y(t)$:$y(t) = x_2(t) - K_1x_1(t)$,则理想滑动模运动方程变为

$$\dot{x}_1(t) = (A_{11} + A_{12}K_1)x_1(t) + (C_{11} + C_{12}K_1)x_1(t-\tau) + A_{12}y(t) + C_{12}y(t-\tau), \tag{8}$$

$$E_2\dot{y}(t) = K_2 y(t). \tag{9}$$

(5)式变为 $x_1(t) = \phi_1(t), y(t) = \phi_2(t) - K_1\phi_1(t), t \in [-\tau, 0]$. (9)式为一无滞后广义线性定常系统,由(7)及解的表达式 $y(t) = e^{\hat{E}_2^D \hat{K}_2 t} y(0)$(这里 $\hat{E}_2 = (\lambda_1 E_2 + K_2)^{-1}E_2$,$\lambda_1$ 为使$(\lambda_1 E_2 + K_2)$ 可逆的实数,$\hat{K}_2 = (\lambda_1 E_2 + K_2)^{-1}K_2$)知 $\| y(t) \| \leqslant e^{-\gamma} y_0$. 考虑系统

$$\dot{x}_1(t) = (A_{11} + A_{12}K_1)x_1(t) + (C_{11} + C_{12}K_1)x_1(t-\tau), \tag{10}$$

作坐标变换 $z(t) = e^{\beta t}x_1(t)$,则(10)式变为

$$\dot{z}_1(t) = (A_{11} + A_{12}K_1 + \beta I_{n-m})z(t) + e^{\beta\tau}(C_{11} + C_{12}K_1)z(t-\tau). \tag{11}$$

对系统(11)取 Lyapunov 函数为 $V(z(t)) = z^{\mathrm{T}}(t)Pz(t)$,沿着(11)的解的轨道,$V(z(t))$ 对 t 的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}(z(t)) &= -z^{\mathrm{T}}(t)Qz(t) + 2z^{\mathrm{T}}(t-\tau)e^{\beta\tau}(C_{11} + C_{12}K_1)^{\mathrm{T}}Pz(t) \\ &\leqslant -z^{\mathrm{T}}(t)Qz(t) + 2\| z^{\mathrm{T}}(t-\tau) \| e^{\beta\tau} \| (C_{11} + C_{12}K_1)^{\mathrm{T}}P \| \, \| z(t) \|. \end{aligned}$$

假定对 $q>1$ 有 $V(z(t-\tau))<q^2V(z(t))$，则

$$\|z(t-\tau)\|<q\alpha\|z(t)\|,$$

$$\dot V(z(t))\leqslant-[\lambda_{\min}(Q)-2\alpha q\mathrm{e}^{\beta\tau}\|(C_{11}+C_{12}K_1)^{\mathrm T}P\|]\|z(t)\|^2.$$

若(6)成立，则对某 $q>1$，$\lambda_{\min}(Q)>2\alpha q\mathrm{e}^{\beta\tau}\|(C_{11}+C_{12}K_1)^{\mathrm T}P\|$，$\dot V(z(t))$ 负定．由 Razumikhin 定理[3] 系统(11)稳定．故(10)指数稳定且具有稳定度 β，其基础解 $X(t)$ 满足 $\|X(t)\|\leqslant l_1\mathrm{e}^{\beta t}$. 由[4]，(8)具有初始条件 $x_1(t)=\phi_1(t),t\in[-\tau,0]$ 的解为 $x_1(t,0,\phi_1)=X(t)\phi_1(0)+(C_{11}+C_{12}K_1)\int_{-\tau}^{0}X(t-s-\tau)\phi_1(s)\mathrm{d}s+\int_0^tX(t-s)[A_{12}y(s)+C_{12}y(s-\tau)]\mathrm{d}s$，故有

$$\|x_1(t,0,\phi_1)\|\leqslant\|X(t)\|\ \|\phi_1(0)\|+\|(C_{11}+C_{12}K_1)\|\int_{-\tau}^{0}\|X(t-s-\tau)\|\ \|\phi_1(s)\|\mathrm{d}s$$

$$+\int_0^t\|X(t-s)\|[\|A_{12}\|\ \|y(s)\|+\|C_{12}\|\ \|y(s-\tau)\|]\mathrm{d}s,$$

因为 $\phi_1(t)$ 为 $[-\tau,0]$ 上的有界函数，所以存在 $l_2>0$ 使 $\|\phi_1(t)\|\leqslant l_2$. 把 $\|\phi_1(t)\|$，$\|X(t)\|$，$\|y(t)\|$ 的所有估计代入上式整理得

$$\|x_1(t,0,\phi_1)\|\leqslant[l_1l_2-\|(C_{11}+C_{12}K_1)\|\frac{l_1l_2}{\beta}-\frac{l_1\|A_{12}\|}{\beta-\gamma}y_0]\mathrm{e}^{-\beta t}$$

$$+\|(C_{11}+C_{12}K_1)\|\frac{l_1l_2}{\beta}\mathrm{e}^{-\beta(t-\tau)}+\frac{l_1\|A_{12}\|}{\beta-\gamma}\mathrm{e}^{-\gamma t}$$

$$+\frac{l_1\|C_{12}\|}{\beta-\gamma}y_0(\mathrm{e}^{-\gamma(t-\tau)}-\mathrm{e}^{-\beta t+\gamma\tau}).$$

即 $\lim\limits_{t\to\infty}\|x_1(t,0,\phi_1)\|=0$. 又 $x_2(t)=y(t)+K_1x_1(t)$. 故 $\lim\limits_{t\to\infty}x_2(t)=0$，即在 $S=0$ 上，系统渐近稳定．

推论 1 若 $E_2\equiv0$，则在定理 1 的条件下，存在切换函数 $S_1(t)$：$S_1(t)=K_1x_1+\xi_1(t)$，$\dot\xi_1=-K_1(A_{11}+I_{n-m})x_1(t)-(K_1A_{12}-I_m)x_2(t)-K_1[C_{11}x_1(t-\tau)+C_{12}x_2(t-\tau)]$，在切换流形 $S_1=0$ 上，系统渐近稳定．

证 当 $E_2\equiv0$ 时，理想滑动模运动方程为(3)和 $x_2(t)=K_1x_1(t)$. 把此式代入(3)即得(10)，由定理 1 的证明即得结论．

3.2 控制律的设计

定理 2 对系统(3)～(5)和切换函数 $S(t)$，存在变结构控制

$$u(t)=-B_2^{-1}[(A_{21}-E_2K_1A_{11}-K_2K_1)x_1(t)+(A_{22}-E_2K_1A_{12}+K_2)x_2(t)$$

$$+(C_{21}-E_2K_1C_{11})x_1(t-\tau)+(C_{22}-E_2K_1C_{12})x_2(t-\tau)$$

$$+(\|M\|h(x_1,x_2,t)+\varepsilon)\mathrm{sgn}\,S],$$

使系统在此控制的作用下，流形 $S=0$ 外的运动于有限时刻 T 到达此流形．

证 在 $u(t)$ 的作用下，通过简单计算知

$$S^{\mathrm T}\dot S(t)=S^{\mathrm T}[-(\|M\|h(x_1,x_2,t)+\varepsilon)\mathrm{sgn}\,S+D_2f(x_1,x_2,t)]\leqslant-\varepsilon\|S\|.$$

即 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|S\|\leqslant-\varepsilon$. 从 t_0 到 t 积分上式得 $\|S(t)\|-\|S(t_0)\|\leqslant-\varepsilon(t-t_0)$. 注意到 $\|S(t)\|\geqslant0$，故存在时刻 T：$0<T\leqslant\frac{\|S(t_0)\|}{\varepsilon}+t_0$，使 $\|S(T)\|=0$.

推论 2 对系统(3)～(5)，当 $E_2\equiv0$ 时，存在变结构控制

$$u_1(t)=-B_2^{-1}[x_2(t)-K_1x_1(t)+A_{21}x_1(t)+A_{22}x_2(t)+C_{21}x_1(t-\tau)+C_{22}x_2(t-\tau)$$

$$+ (\|M\| h(x_1,x_2,t) + \varepsilon)\mathrm{sgn}\, S_1(t)],$$

使系统在此控制的作用下,在流形 $S_1 = 0$ 外的运动与有限时刻 T 到达此流形.

证　略.

4 结束语

本文首次通过引入滞后广义系统的受限等价分解形式和动态补偿器,研究了滞后线性定常广义不确定系统的变结构控制设计问题.有兴趣的读者可利用本文所建立的方法研究滞后广义系统的调节和跟踪问题.此外,由于篇幅所限,本文只给出了系统到达滑动模的控制器设计,闭环系统中静态变量的稳定性问题需进一步讨论,参见[6].

参 考 文 献

1 Campbell,S. L.. Singular systems of differential equations. Pitman Advanced,1980,49－56

2 温香彩,刘永清.奇异不确定系统的滑动模控制.控制理论与应用,1995,12(1):114－119

3 Hale,J.. Theory of Functional Equations. New York:Springer-Verlag,1997

4 秦元勋,刘永清,王联,郑祖休著.带有时滞的动力系统的运动稳定性.北京:科学出版社,1989

5 Dai,L.. Singular Control Systems. Berlin: Springer-Verlag,1989,118

6 刘永清,温香彩.广义系统的变结构控制.广州:华南理工大学出版社,1997

Design of Variable Structure Control for Linear Time-Invariant Singular System with Time-Delay

WEN Xiangcai

(Department of Henan Normal University · Henan Xinxiang,453002,PRC)

LIU Yongqing and QIU Shuisheng

(College of Electronic and Information,South China University of Technology · Guangzhou,510641,PRC)

Abstract: The problem of design of variable structure control for linear time-invariant singular system with time-delay is considered in this paper by employing the theories of normal system with time-delay and singular system without time-delay,and the equivalent restricted decomposition form introduced. The method presented gives a novel sight to study the other problem (such as requlator,track) of singular system with time-delay further.

Key words: time-delay system; singular system; variable structure control

本文作者简介

温香彩 1964年生.河南师范大学数学系教授.1995年在华南理工大学自动化系获博士学位,1995年7月至1997年7月在华南理工大学电子与信息学院做博士后研究.研究兴趣为广义系统的变结构控制,分支与混沌控制,非线性系统的鲁棒控制等.

刘永清 1930年生.博士生导师.华南理工大学电子与信息学院教授.研究兴趣为非线性复合大系统的稳定与镇定.

丘水生 1936年生.博士生导师.华南理工大学电子与信息学院教授.研究兴趣为非线性电路系统分析、分支与混沌.

第 15 卷第 1 期
1998 年 2 月
控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS
Vol. 15, No. 1
Feb., 1998

限制解耦控制的充分必要条件*

何关钰
(上海交通大学应用数学系·上海,200030)

摘要:本文利用初等变换方法推得非方系统限制解耦控制的充分必要条件.

关键词:非方系统;限制解耦控制;初等变换

1 引 言

设有线性定常系统 (A,B,C):

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx. \end{cases} \tag{1}$$

其中,x,u,y 的维数分别为 $n,p,m,p \geqslant m$. 如果存在 $p \times n$ 阶矩阵 K 和 $p \times m$ 阶矩阵 F,使反馈系统 $(A+BK,BF,C)$ 的传递函数阵为非异对角阵,则称(1)为可解耦系统. 系统的解耦问题是三十年前首先由 Morgan 提出的[1],故也称为 Morgan 问题. 显然,可解耦系统必需是右可逆系统,因此,以下总设 (A,B,C) 右可逆.

对于 $p=m$,即方系统情形,该问题早已解决,不仅推得判别可解耦的充分必要条件,也提出一些具体的解耦方法. 而对于非方系统,$p>m$,虽然至今已有不少研究成果,但问题仍未得到完全解决.

本文讨论的问题为,是否存在 $p \times m$ 阶矩阵 G,使方系统 (A,BG,C) 可解耦,即所谓的限制解耦控制问题[3]. 以后凡提及系统可解耦,都是指上述意义. 文中利用初等变换,给出判定的充分必要条件以及 G 的具体求法,还讨论了使系统可解耦的向量组合.

2 准备工作

记

$$d_i = \min\{j: C_iA^jB \neq 0\}, \tag{2}$$

$$D = \begin{bmatrix} C_1A^{d_1}B \\ \vdots \\ C_mA^{d_m}B \end{bmatrix}, \tag{3}$$

$$S_i = \begin{bmatrix} C_iA^{d_i+1}B \\ \vdots \\ C_iA^{n-1}B \end{bmatrix}. \tag{4}$$

其中,$i=1,2,\cdots,m$,C_i 是 C 的第 i 个行向量. 由于右可逆,$d_i \leqslant n-1$,如果 $d_i = n-1$,则 S_i 视作"空"阵.

对于数组 $l_i \geqslant d_i$,$i=1,2,\cdots,m$,如果存在矩阵 G 使以下两式成立:

i)
$$l_i = \min\{j: C_iA^jBG \neq 0\}, \tag{5}$$

ii)
$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} C_1A^{l_1}B \\ \vdots \\ C_mA^{l_m}B \end{bmatrix} G = m, \tag{6}$$

* 国家自然科学基金资助项目(69374006).

本文于 1996 年 2 月 6 日收到. 1997 年 3 月 17 日收到修改稿.

则方系统 (A,BG,C) 可解耦，称 $C_1A^{l_1}B,\cdots,C_mA^{l_m}B$ 为可解耦向量组. 可见，系统可解耦的充分必要条件是存在可解耦向量组.

为叙述方便，对以后的变换过程作如下约定：

1) 若对 D 进行列变换，则 $S_1,\cdots,S_m$ 也作相同列变换，G 作相应行变换以保持 DG 不变.

2) 若 G 的某行取为零行，则在乘积 DG 中，D 以及有关联的 $S_1,\cdots,S_m$ 中相应的列将不起作用，所以这些行和列都可以划去，文中对此简述为：划去 D 的某列.

3) 为简化记号，经过变化后的各矩阵，仍用原来的记号表示.

4) 如果某矩阵的行或列全部被划去，则该矩阵作"空"阵处理.

3 主要结果

在上节约定下，以式(3)的 D 开始按以下步骤进行变换.

1° 设 $r_1=\operatorname{rank} D$. 如果 $r_1<m$，则适当交换行次序，再用列变换把 D 化为

$$D=\begin{bmatrix} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1 & 0 \\ \times & \cdots & \times & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \times & \cdots & \times & \end{bmatrix}\begin{array}{l} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} r_1 \\ \\ \\ \\ \end{array}. \tag{7}$$

D 的第 1 至第 r_1 列中，每列都至少有一个非零元 1，如果某列除此之外还有别的非零元，则划去该列. 当然，D 可能被划成一个零阵.

假若 D 的某行因此变成零行，并且它原先是与 C_i 相应的. 如果这时 S_i 已经是"空"阵或零阵，则步骤结束. 反之，就从 S_i 中自上而下取出第 1 个非零行，用它去交换 D 的那个零行. 同时，把 S_i 的该行及其上方的零行划去，意即不再使用.

2° 设 $r_2=\operatorname{rank} D$. 如果 $r_2<m$，则和第 1°步相同方法进行，步骤或者结束或者继续.

接下来的步骤依此类推.

定理 1 系统 (A,B,C) 可解耦的充分必要条件为，上述步骤进行至第 k 步时，$r_k=\operatorname{rank} D=m$.

证 若 $r_1=m$，则系统可解耦，现设 $r_1<m$. 如果式(7)的 D 的第 j 列中非零元超过一个，该列第 j 行的元已经是 1，那么另有非零元在第 q 行，$q>r_1$. 用 $g_1,\cdots,g_m$ 表示 DG 的行向量，易见 $g_1,\cdots,g_{r_1}$ 就是 G 的前 r_1 行. 若 $g_j\neq 0$，当 $g_q=0$ 时，$g_1,\cdots,g_{r_1}$ 线性相关，而 $g_q\neq 0$ 时，g_q 可由 $g_1,\cdots,g_{r_1}$ 线性表示，说明总有 $\operatorname{rank} DG<m$. 可见，要进一步判断系统是否可解耦，必需 $g_j=0$，按约定的提法，就是划去 D 的第 j 列.

这样，D 的某些行变成零行，比如第 j 行. 设它相应于变换前的 $C_iA^{d_i}B$(因为交换过行次序)，就需要从 S_i 中另取一个非零向量来替代. 如果 S_i 已经是"空"阵或零阵，无法替代，说明系统不可解耦. 反之，替代后进入第 2° 步.

第 2° 步的讨论和上面相同，依此类推. 由于步骤是有限的，即 $S_1,\cdots,S_m$ 中总会出现"空"阵或零阵，假若直至结束，总是 $\operatorname{rank} D<m$，则系统不可解耦；假若进行到第 k 步，$r_k=m$，则存在 G 使 $\operatorname{rank} DG=m$，再按步骤退回去，删去的列相应补上，G 的相应行补以零行，退回后的 G 以及 D 的行 $C_1A^{l_1}B,\cdots,C_mA^{l_m}B$ 使式(5)和(6)成立，系统可解耦. 定理证毕.

推论 系统可解耦的必要条件是，以上步骤中，每一步开始时 D 的列数 $\geqslant m$.

此结论显然，因为如果 D 的列数已经 $<m$，必有 $\operatorname{rank} DG<m$. 因此，被划去的列数累计不

可超过 $p-m$ 个，步骤至多进行 $p-m+1$ 步.

4　可解耦向量组

设系统 (A,B,C) 可解耦，则上节的步骤已经给出一组可解耦向量的求法，当然，可解耦向量组不一定仅此一组，本节讨论 $C_1A^{l_1}B,\cdots,C_mA^{l_m}B$ 为可解耦向量组的条件，即是否存在 G 使式(5)和(6)成立. 仍记

$$D=\begin{bmatrix}C_1A^{l_1}B\\ \vdots\\ C_mA^{l_m}B\end{bmatrix} \tag{8}$$

Q 表示由向量 $C_1A^{d_1}B,\cdots,C_1A^{l_1-1}B,C_2A^{d_2}B,\cdots,C_2A^{l_2-1}B,\cdots,C_mA^{d_m}B,\cdots,C_mA^{l_m-1}B$ 为行构成的矩阵. 那么，式(5)和式(6)相当于以下两式：

$$QG=0, \tag{9}$$

$$\operatorname{rank} DG=m. \tag{10}$$

定理 2　$C_1A^{l_1}B,\cdots,C_mA^{l_m}B$ 为可解耦向量组的充分必要条件是，通过列变换，可以把矩阵 $\begin{bmatrix}D\\Q\end{bmatrix}$ 化成以下形式：

$$\begin{bmatrix}D\\Q\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c:c}I_m&0\\ \hdashline 0&\bar{Q}\end{array}\right]. \tag{11}$$

证　充分性. 只需取 $G=\begin{bmatrix}I_m\\0\end{bmatrix}$ 即可使式(9)和(10)成立.

必要性. 由(10)推知 $\operatorname{rank} D=m$，先用列变换化成

$$\begin{bmatrix}D\\Q\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c:c}I_m&0\\ \hdashline Q_1&Q_2\end{array}\right].$$

如果 $Q_2=0,Q_1\neq 0$，则一切使 $QG=0$ 的 G，都有 $\operatorname{rank} DG<m$，与题设矛盾. 如果 $Q_2\neq 0$，那么设 $\operatorname{rank} Q_2=r$，适当交换 Q 的行次序后，就可用列变换进一步化为

$$\begin{bmatrix}D\\Q\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c:c:c}I_m&0&0\\ \hdashline 0&I_r&0\\ \hdashline Q_3&Q_4&0\end{array}\right].$$

如果 $Q_3\neq 0$，则一切使 $QG=0$ 的 G，仍有 $\operatorname{rank} DG<m$，与题设矛盾. 从而 $Q_3=0$，这就是(11)的形式. 定理证毕.

5　例

设有系统 (A,B,C)，其中

$$n=11,\quad m=3,\quad p=6,$$

$$D=\begin{bmatrix}C_1B\\C_2B\\C_3B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&-1&2&1&0\\1&1&2&-1&0&1\\1&1&2&-1&0&1\end{bmatrix},$$

$$S_1=\begin{bmatrix}C_1AB\\C_1A^2B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&0&0&0\\1&-1&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$S_2=\begin{bmatrix}C_2AB\\C_2A^2B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&1&0&0&0\\1&2&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$S_3=\begin{bmatrix}C_3AB\\C_3A^2B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0&0&0&0\\2&-1&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$C_iA^jB=0,\quad i=1,2,3,\quad j>2.$$

第1步　$r_1=\mathrm{rank}D=2$,用列变换把 D 化成

$$D=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

按步骤划去第2列,S_1,S_2,S_3 经相同列变换后再划去第2列,分别化为

$$S_1=\begin{bmatrix}1&2&-2&-1&0\\2&4&-5&-2&1\end{bmatrix},\quad S_2=\begin{bmatrix}-1&-2&3&1&-1\\-1&-5&4&1&-2\end{bmatrix},$$

$$S_3=\begin{bmatrix}0&-2&1&0&-1\\3&5&-7&-3&1\end{bmatrix}.$$

这时,D 中有二个零行,相应于 C_2B 和 C_3B,分别用 S_2 和 S_3 的第1行去替换.

第2步

$$D=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\-1&-2&3&1&-1\\0&-2&1&0&-1\end{bmatrix},$$

有 $\mathrm{rank}D=3$,说明系统可解耦,C_1B,C_2AB,C_3AB 是可解耦向量组.

接下来看向量组 C_1AB,C_2AB,C_3AB ,这时

$$D=\begin{bmatrix}C_1AB\\C_2AB\\C_3AB\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&0&0&0\\0&1&1&0&0&0\\1&1&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$Q=\begin{bmatrix}C_1B\\C_2B\\C_3B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&-1&2&1&0\\1&1&2&-1&0&1\\1&1&2&-1&0&1\end{bmatrix}.$$

则 $\mathrm{rank}D=3$,并且用列变换可化为

$$\begin{bmatrix}D\\Q\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_3&0\\0&\overline{Q}\end{bmatrix},\quad \overline{Q}=\begin{bmatrix}2&1&0\\-1&0&1\\-1&0&1\end{bmatrix}.$$

根据定理2,C_1AB,C_2AB,C_3AB 也是可解耦向量组.

再看向量组 C_1AB,C_2A^2B,C_3AB,这时,

$$D=\begin{bmatrix}C_1AB\\C_2A^2B\\C_3AB\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&0&0&0\\1&2&0&0&0&0\\1&1&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$Q=\begin{bmatrix}C_1B\\C_2B\\C_2AB\\C_3B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&-1&2&1&0\\1&1&2&-1&0&1\\0&1&1&0&0&0\\1&1&2&-1&0&1\end{bmatrix}.$$

虽然 $\mathrm{rank}D=3$,经列变换却化得

$$\begin{bmatrix} D \\ Q \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c:c} I_3 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & I_2 & 0 \\ \hdashline Q_3 & Q_4 & 0 \end{array}\right], \quad Q_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

由定理 2，C_1AB，C_2A^2B，C_3AB 不是可解耦向量组.

参 考 文 献

1 Morgan, B. S.. The synthesis of linear multivariable systems by state feedback. JACC, 1964, 468－472

2 Descusse, J., Lafay, J. F and Malabre, M.. Solution to Morgan's problem. IEEE Trans. Automat. Contr., 1988, AC-33 (8): 732－739

3 Kamiyama, S. and Furuta, K.. Decoupling by restricted state feedback. IEEE Trans. Automat. Contr., 1976, AC-21(3): 413－415

4 陈树中. Morgan 问题：输入数＝输出数＋1 情形. 自动化学报, 1993, 19(5): 520－526

5 何关钰. 线性控制系统理论. 沈阳：辽宁人民出版社, 1983, 441－451

Necessary and Sufficient Conditions for the Restricted Decoupling Control

HE Guanyu

(Department of Applied Mathematics, Shanghai Jiaotong University · Shanghai, 200030, PRC)

Abstract: In this paper a necessary and sufficient conditions for the restricted decoupling control of nonsquare linear systems is obtained by elementary transformation.

Key words: nonsquare system; restricted decoupling control; elementary transformation

本文作者简介

何关钰 1939 年生. 1962 年毕业于南开大学数学系，现为上海交通大学应用数学系教授. 目前研究领域为线性系统理论及其应用.

一种有指导的轮式机器人全局规划方法*

林怡青　周其节
(华南理工大学自动控制工程系·广州,510641)

摘要：非完整系统的运动规划是尚未得到充分研究的重要问题.本文把全局规划方法与局部规划方法结合起来,提出一种包含非完整约束条件的有指导的全局运动规划方法,并通过仿真验证了其可行性.

关键词：机器人；运动规划；非完整约束

1 引　　言

近十多年来,许多专家学者对机器人运动规划问题进行了大量的研究,并已得到了一套系统的理论和方法[1].其基本前题是机器人在其位姿空间中可以自由运动.当机器人仅受到完整约束时,可以从约束条件中解出若干状态变量,从而将原系统降维,而对于运动规划方法不产生实质性影响.当机器人存在非完整约束(以下称运动约束)时,约束条件不引起维数的改变,而必须在运动规划过程中加以考虑.这样,原来的方法就不能直接使用,而需要开展新的研究[1~5].本文把局部规划方法引入全局规划方法中,实现了一种有指导的快速全局规划算法.

2 轮式机器人的运动约束

如图 1 所示,取两后轮轴线的中心为参考点建立运动坐标系 $O_AX_AY_A$,机器人当前运动沿 θ 方向.可用三元组 $q(x,y,\theta)$ 表示机器人的位姿,其中 x,y 为 O_A 的坐标,θ 是 X_A 与固定参考系 X 轴之间的夹角.A 的所有 q 组成 A 的位姿空间 C.当不存在运动约束时,可以把障碍物转化到 C 空间中.除去障碍物后的 C 空间称为自由空间,用 C_{free} 表示.运动规划问题表示为:在 C_{free} 中,给定始点 q_{int} 和终点 q_{goal},确定一条连接两点的连续运动轨迹.如果存在运动约束,障碍物的转化将与机器人的当前位姿相关而难以实现[5].考虑轮子与地面的纯滚动约束

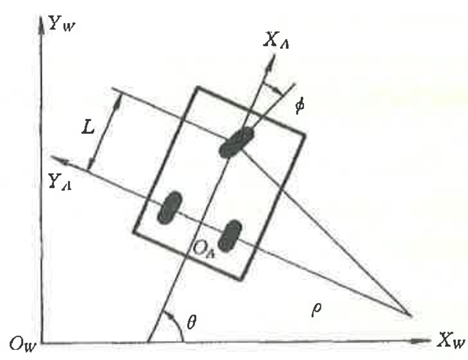

图 1　运动约束

$$-\dot{x}\sin\theta+\dot{y}\cos\theta=0. \tag{1}$$

其中 $\dot{x},\dot{y}$ 是 x,y 的导数.该约束不可积,即不能通过引入该约束使机器人 C 空间降维.因此,必须在运动规划中考虑轮子与地面的纯滚动所带来的影响.设机器人当前的运动轨迹为半径 ρ 的圆弧,满足 $\mathrm{tg}\varphi=L/\rho$.其中 L 为前后轮的轴距,φ 为前轮方向角.当 φ 为零时 ρ 无穷,机器人沿直线转迹运动.一般情况下 φ 受机器人机构的限制,因而有 $\mathrm{tg}\varphi_{\max}=L/\rho_{\min}$.用时间 t 为参数描述机器人的运动,对于给定的方向角 φ 和给定的线速度 v,

$$\dot{x}=v\cos\theta,\quad \dot{y}=v\sin\theta,\quad \dot{\theta}=(v/L)\mathrm{tg}\varphi. \tag{2}$$

* 广东省自然科学基金资助项目(940004).
本文于 1996 年 9 月 6 日收到.1997 年 4 月 8 日收到修改稿.

积分得

$$\begin{cases} \theta(t) = \theta(0) + t(v/L)\mathrm{tg}\varphi, \\ x(t) = x(0) + L/\mathrm{tg}\varphi\{\sin[\theta(0) + (v/L)\mathrm{tg}\varphi] - \sin[\theta(0)]\}, \\ y(t) = y(0) + L/\mathrm{tg}\varphi\{\cos[\theta(0) + (v/L)\mathrm{tg}\varphi] - \cos[\theta(0)]\}. \end{cases} \tag{3}$$

3　无指导的树搜索规划方法

经典的工程方法如 Roadmap 方法、Exact cell decomposition 方法、Approximate cell decomposition 方法都是全局规划方法[1]. 这些方法的前提是机器人可以在 C 空间中自由运动. 当存在运动约束时不能直接使用现有的算法. 参照全局规划的思想方法，文献[1]介绍了一种基于图搜索的方法，在 C_{free} 中寻找由直线段和满足半径大于 $\rho_{\min}$ 的圆弧连接而成的轨迹，这种方法已在文献[5]中分析. 本文考虑如下的基于树搜索的方法.

把区间$[-\varphi_{\max},\varphi_{\max}]$分成 n 个子集 $F_i(i=0,1,2,\cdots,n-1)$. 可以用树结构表示机器人的所有可能控制序列. 即把离散化的机器人方向角控制序列空间组织为一棵 n 叉树，从 q_{int} 至 q_{goal} 的一条运动轨迹由从树根至树叶的一条控制路径实现. 显然，如果存在由 q_{int} 至 q_{goal} 的一条无碰撞运动轨迹，通过遍历树一定可以找出来. 定义如下函数

GOAL(x,y,θ)：若机器人的当前位姿已到达 q_{goal}，给全局变量 g 赋真值并返回真，否则返回假；NEW(p)：生成新结点 p；DELETE(p)：删除结点 p；NEXTXY(x,y,θ,φ,p)：根据当前的 p 和 φ 按式(3)计算下一状态的 x,y,θ；INTERFER(x,y,θ)：若当前状态 x,y,θ 与障碍物发生碰撞则返回真，否则返回假. 遍历功能由递归程序 EXPAND 实现，具体定义为

```
EXPAND (p)
{INT x,y;FLOAT θ,φ;
① IF(GOAL (p.x,p.y,p.θ)){DELETE(p); RETURN 0;}
② FOR(I = 0;I < n;I ++)
{IF(g)BREAK;
φ = Φ[I];NEXTXY(x,y,θ,φ,p);
IF(NOT INTERFER(x,y,θ))
{NEW(p);p.x = x;p.y = y;p.θ = θ;EXPAND(p);}
}DELETE(p);RETURN 0;
}.
```

其中 Φ 为全局变量，$\Phi[I]$ 为上述第 i 个子集 F_i 的中点. 该算法的时间复杂性与 n^m 有关，其中 m 为树的深度，与空间 C 的形状有关. 运行结果如图 2、图 3 所示，图中画出了搜索过程中的每一步试探. 在此例中，障碍物为四周墙壁，运动约束由数据 $\Phi[I]$ 和函数 NEXTXY 保证. 工作空间

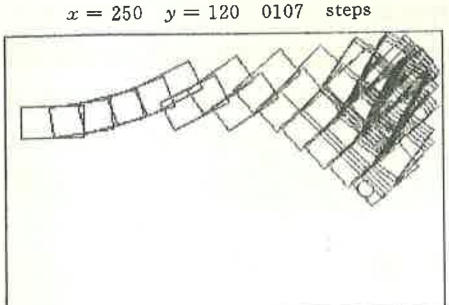

图 2　无指导搜索之一

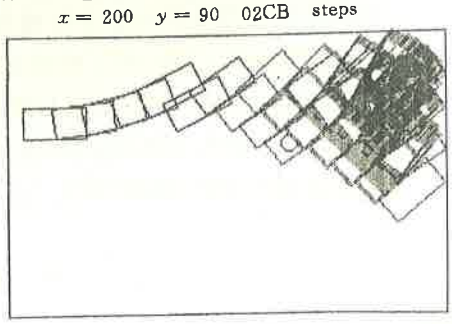

图 3　无指导搜索之二

左上角坐标为20,20右下角坐标为300,200. 机器人长40宽20. 取 $\varphi_{max}=10$. 左转优先,始点坐标为40,75. 图2终点坐标为250,120经263次搜索找到. 图3终点坐标为200,90经715次搜索找到. 与其它全局方法一样,计算量与目标的位置有关,在一般情况下较大.

4 有指导的全局规划方法

与全局方法不同,局部规划方法能很快地确定基于局部信息的当前最佳运动方向. 但由于信息的不完全,不能保证当前决策的全局合理性,易于陷入局部最小点. 常用的局部规划方法主要有 Potential field 方法[1]和模糊逻辑方法[6,7].

结合局部规划方法的灵活快速和全局方法的安全可靠,本文提出一种在局部方法指引下的全局规划方法. 就是用局部方法决定当前的优先搜索方向,取代上述算法左转优先的盲目性,以求吸取局部方法优点,而当局部方法失效时又能以全局方法加以补救. 定义函数

FIND (x,y,θ):根据当前位姿按照某种局部规划方法确定最优搜索方向并返回该方向;

ORDER(V,u):根据最优方向 u 确定其余搜索方向的优先顺序.

修改EXPAND,在原①②之间插入上述函数(其余部分不变)改为

① IF(GOAL($p.x,p.y.p.\theta$)){DELETE(p);RETURN 0;}

ORDER(V,FIND(x,y,θ));

② FOR($I=0;I<n;I++$)

运行结果如图4所示,对上述相同的两种运行数据,所需的搜索次数大为减少,分别为12,8. 图5为该算法在有其它障碍物存在情况下的运动规划结果.

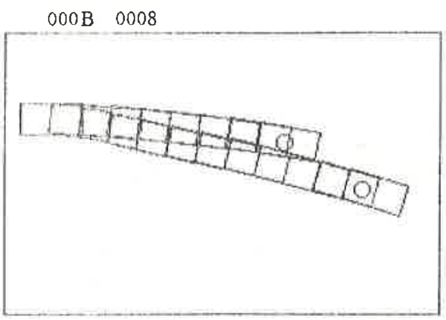

图4 有指导的搜索

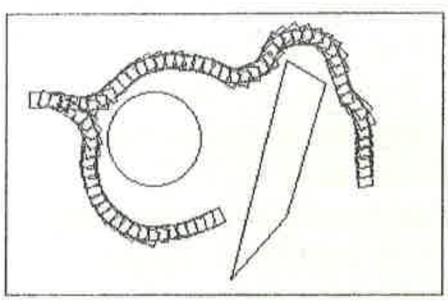

图5 运行例

5 结束语

本文提出的算法在全局规划的框架下运行. 其最重的价值在于局部方法与全局方法的有机融合,在优先考虑局部规划结果的前题下并没有丢失全局信息,而是在局部规划的指导下改变全局搜索的优先顺序. 当局部规划成功时,该算法有同局部方法一样的速度. 当局部方法失败时又能以自然的方式按全局方法进行规划. 这种处理方法的基本思想具有普遍意义,不仅可以在上述树搜索的框架下实现,对于其它全局搜索方法,如图搜索等方法,也可进行类似的改造,实现由局部方法指导的快速全局规划算法. 此外,可以采取多种不同的局部规划策略,在并行结构框架中运行,提高系统的速度和适应性. 该算法也可以用于没有运动约束的场合,只需把 φ_{max} 定义为 π 并修改函数NEXTXY.

参考文献

1 Latombe, J. C.. Robot motion planning. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1994

2 Yongji Wang, Linnett J. R. and Kinematics, J. R.. Kinematic constraints and path planning for wheeled mobile robots. Robotica, 1994, 12(5): 391－400

3 Yongji Wang, Linnett, J. A. and Roberts, J.. Motion feasibility of a wheeled vehicle with a steering angle limit. Robotica, 1994, 12(3): 217－226

4 胡跃明，周其节，裴海龙. 非完整控制系统的理论与应用. 控制理论与应用，1996，13(1)：1－10

5 林怡青，周其节. 非完整约束对于运动规划问题的影响. 华南理工大学学报，1997，25(12)：111－115

6 Bertrand Beaufrere, Said Zeghloul. A mobile robot navigation method using a fuzzy logic Approach. Robotica, 1995, 13 (5): 437－448

7 Li Wei. Behavior based control of a mobile robot in unkown environments using fuzzy logic. 控制理论与应用，1996，13 (2): 153－162

A Guided Global Planning Method for Wheeled Robot

LIN Yiqing　and　ZHOU Qijie

(Department of Automatic Control Engineering, South China University of Technology · Guangzhou, 510641, PRC)

Abstract: Motion planning of nonholonomic system is an important issue which had not yet been fully studied. In this article, global method is combined with local method, and a guided global planning method including nonholonomic constraint is proposed. The feasibility of the method is tested.

Key words: robot; motion plnning; nonholonomic constraint

本文作者简介

林怡青　1951 年生，副教授. 现为华南理工大学自动控制工程系的在职博士研究生. 发表论文二十余篇，研究兴趣为机器人控制，复杂系统的计算机控制.

周其节　见本刊 1998 年第 1 期第 38 页.