

梯度投影法应用于冗余机器人分解运动速度控制的新方案

黄磊光 李耀通

(中国科学院自动化研究所复杂系统实验室·北京, 100080)

摘要: 本文讨论分解运动速度控制框架下将梯度投影法应用于冗余机器人控制的有关问题。实施梯度投影法的关键之一是自运动大小的选择。本文先分析了确定自运动大小的现有方法的优缺点, 然后提出按机器人关节配置奇异程度来确定自运动优化因子的思想和方案。这种新方案与原有的动态优化方案相比, 更有利于快速、并行的实施, 文中给出了相应的计算思路。计算机仿真比较了该方案与固定优化因子方案的控制结果。

关键词: 梯度投影法; 分解运动速度控制; 冗余分解; 并行计算; 奇异值分解

1 引言

冗余机器人的控制问题在机器人学术界受到重视已经有相当长的时间了^[1~3]。冗余机器人的结构特点在于它拥有高于完成世界空间内给定任务所必须的自由度。这样就带来许多优点, 包括避免关节的奇异配置、避免关节间及关节与环境物间的碰撞、关节空间变量避免越限等。而冗余机器人的轨迹规划是一个复杂的非线性问题, 对于冗余机器人, 末端执行器一个位置通常对应着关节空间的无穷多解。尽管出现了一些较为有效的冗余机器人运动学控制方案, 但冗余控制的问题仍然远没有解决。一些特定的方案虽然适合于特定的应用场合, 而真正适合作实时在线控制且计算简单的方法仍很少。

如果用 $\theta(t)$ 来表示机器人的广义关节变量矢量, 用 $x(t)$ 表示其末端执行器的运动轨迹, 则本文的规划问题可以这样描述: 给定 $\theta(t) \in \mathbb{R}^n$ 和 $x(t) \in \mathbb{R}^m$ 分别为初始关节配置和期望的末端轨迹, $n \geq m$, 试求 $\theta(t)$ 使得下式成立:

$$x(t) = f(\theta(t)), \quad t \in [t_0, t_f], \quad (1)$$

$n > m$ 的机器人即为冗余机器人。方程两边对时间求导, 得雅可比方程

$$\dot{x}(t) = J(\theta)\dot{\theta}(t), \quad (2)$$

其中, $\dot{x} \in \mathbb{R}^m, \dot{\theta} \in \mathbb{R}^n, J \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 为雅可比矩阵, $J_{i,j} = \partial f_i(\theta) / \partial \theta_j$ 。

本文在分解运动速度控制的框架下分析现有的梯度投影法实施方案的优缺点, 并提出对其加以改进的想法。下文第二部分回顾分解运动速度控制和梯度投影法; 第三部分分析已有的自运动大小确定实施方案及各自特点; 在此基础上, 第四部分提出一种新的实施方案; 第五部分是新方案用于实施的算法考虑; 第六部分为计算机仿真; 最后是小结。

2 分解运动速度控制和梯度投影法

对于非冗余机器人, 方程(2)在非奇异点处的分解运动速度解为:

$$\dot{\theta}(t) = J^{-1}(\theta)\dot{x}(t). \quad (3)$$

对于冗余机器人, $n > m$, 雅可比矩阵不存在逆矩阵, 需要寻找广义逆。我们寻找使以下误差准则极小的解:

$$C = \dot{\theta}^T A \dot{\theta} / 2 + \lambda^T (\dot{x} - J\dot{\theta}), \quad (4)$$

其中, λ 为拉格朗日乘子矢量, $A = N^2$, N 为对称正定矩阵. 对于一般情形, 解可表示如下:

$$\dot{\theta} = N^{-1}(JN^{-1})^+ \dot{x}, \quad (5)$$

其中 $(JN^{-1})^+$ 表示 JN^{-1} 的 Moore-Penrose 广义逆, 或称伪逆. 当 J 阵满秩即 $\text{rank}(J) = m$ 时, 上式等价于

$$\dot{\theta} = A^{-1}J^T(JA^{-1}J^T)^{-1}\dot{x}. \quad (6)$$

若令 $A = I$, 即将角速度视为归一化后的情形, 则(5)式有如下较为简单的解的形式:

$$\dot{\theta} = J^+ \dot{x}, \quad (7)$$

其中 $J^+ \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 是雅可比矩阵 J 的伪逆, 本文只考虑这种情形. 对于 A 不是单位阵的情形, 完全可以得到类似的结果. 当 $\text{rank}(J) = m$ 时, 上式可按如下方程计算:

$$\dot{\theta} = J^T(JJ^T)^{-1}\dot{x}. \quad (8)$$

Liegeois^[1]提出用梯度投影法把(2)的齐次解引入到关节角速度解中. 选择标量函数 $H(\theta)$ 为待优化的性能指标, 其梯度矢量记为 $\nabla H \in \mathbb{R}^n$, $\nabla H_i = \partial H / \partial \theta_i$, 则以下解具有即时优化 $H(\theta)$ 的作用:

$$\dot{\theta} = J^+ \dot{x} + k(I - J^+ J) \cdot \nabla H, \quad (9)$$

其中的系数 k 为优化因子, 它决定机器人关节自运动的大小. 一般而言, 极大化 $H(\theta)$ 需要选择正的 k 值, 而极小化 $H(\theta)$ 则需要选择负的 k 值.

容易证明, (9) 式是(2)式的最小方差解, 也就是说, 齐次项(第二项)的引入只是引入关节自运动, 并未引起末端速度跟踪误差的变化. 当 $k = 0$ 时, 它就是(7)式.

3 现有的梯度投影法实施方案

在梯度投影法实施时, 指标函数 $H(\theta)$ 和优化因子 k 的选择都是至关重要的. 这里我们只讨论优化因子选择的问题, 是优化因子决定了机器人关节自运动的幅度. 比较典型的梯度投影法实施方案有常值优化、极值优化和动态优化等.

常值优化就是将 k 取为某个恒定的值, 在执行任务的全过程中均使用这个值. 这种方法计算上较为简单, 缺点是针对具体任务, 合适的 k 值需要多次仿真才能找到.

极值优化^[4]的基本思想是找出优化因子的允许取值范围, 然后将它取为极值, 以达到最优优化的目的.

令 $\dot{\theta}_p = J^+ \dot{x}$, $\dot{\theta}_h(I - J^+ J) \nabla H$, 则式(9)可写为

$$\dot{\theta} = \dot{\theta}_p + k\dot{\theta}_h. \quad (10)$$

把各个关节对 k 的上、下限要求分别记为 $k_{\max i}$, $k_{\min i}$, $i = 1, 2, \dots, n$, 前者的最小值就是 $k_{\max}$, 后者的最大值就是 $k_{\min}$.

当 $k_{\max} \geq k_{\min}$ 时, 可取 $k = k_{\max}$ 来将 $H(\theta)$ 极大化, 或取 $k = k_{\min}$ 来将 $H(\theta)$ 极小化. 当 $k_{\max} < k_{\min}$ 时, 不存在合适的 k 来将 $H(\theta)$ 优化, 因为即使取 $k = 0$ 也会使关节角速度越限.

使用这种极值优化方法能够按最快可能的速度进行性能指标的优化, 但其计算量比较大, 此外它至少使某个关节角速度达到其极限.

李鲁亚^[5]提出一种动态优化的方法. 这种方法考虑只在 k 值能使 $H(\theta)$ 优化时才引入 k 值, 否则就令 $k = 0$, 停止优化. 先看下式:

$$\dot{H}(\theta) = \nabla H^T \dot{\theta} = \nabla H^T J^T \dot{x} + k \nabla H^T (I - J^+ J) \nabla H. \quad (11)$$

显然, 当 $\dot{H}(\theta)$ 为正时, 下一时刻 $H(\theta)$ 会增大, 反之 $H(\theta)$ 会减小. 所以, 如果 $H(\theta)$ 是一个待

极大(小)化的指标,则 $\dot{H}(\theta)$ 为负(正)时, k 应取为零值. 为避免因 k 取值的不连续而引起关节角速度的跳变,李文^[5]还提出把 k 值取为平稳变化的指数函数(即所谓运动可优化函数)的方案.

我们注意到, $\dot{H}(\theta)$ 的正负不能作为 k 是否应置零的唯一标准. 事实上,非零的 k 值使得关节角速度(9)的范数增加. 所以,当关节角速度范数达到一定界限时,无论 $\dot{H}(\theta)$ 为多少, k 都应为零,否则就会使关节角速度越限. 因为 $H(\theta)$ 本身并不是性能,而只是人为挑选的、反映性能的某个指标,两者不一致时,先舍弃前者.

4 优化因子选择的新准则

如所周知,机器人操作机在实际控制中存在运动学奇异的问题. 这样,只有当机器人远离奇异配置时,才可以进行次级性能指标的优化. 我们直觉地将优化因子 k 取为变量,使其随机器人关节配置的奇异程度而变化,这是顺理成章的选择.

反映机器人其关节奇异配置的接近程度的指标有不只一种,较为典型的如 Yoshikawa 的可操作度 (manipulability)^[6]. 这里,我们选用另一种指标,即雅可比矩阵的最小奇异值 $\sigma_r(J)$ 来表示奇异程度. 大量的仿真实验表明,雅可比矩阵的最小奇异值 $\sigma_r(J)$ 能很好地表示机器人关节配置的奇异程度,它和可操作度 $\sqrt{\det(JJ^T)}$ 随雅可比阵而变化的规律是非常相似的. 另外,最小奇异值是对雅可比阵进行奇异值分解所得到的“副产品”,所以如果采用奇异值分解的办法,它在计算效率上也优于可操作度指标.

记 σ_r 为 J 的最小奇异值. ϵ_1 为可以开始引入齐次解时的 σ_r , k_m 为最大优化因子, ϵ_2 为可以开始以最快速度优化时的 σ_r , 则优化因子可按式取值:

$$k = \begin{cases} 0, & 0 \leq \sigma_r \leq \epsilon_1, \\ k_m \{ \sin[(\sigma_r + \epsilon_2 - 2\epsilon_1)\pi/(\epsilon_2 - \epsilon_1) + \pi/2] + 1 \} / 2, & \epsilon_1 < \sigma_r < \epsilon_2, \\ k_m, & \sigma_r \geq \epsilon_2. \end{cases} \quad (12)$$

这里, ϵ_1, ϵ_2 和 k_m 都是事先选定的. 如果我们取 $\epsilon_2 = 2\epsilon_1$, 那么当 $\epsilon_1 < \sigma_r < \epsilon_2$ 时, k 就变成较为简单的形式,即 $k = k_m [\sin(\sigma_r \pi / \epsilon_1 + \pi/2) + 1] / 2$. 图 1 示出了 k 值随 σ_r 变化的情况. 我们知道, σ_r 是 J 或关节配置的连续函数,因而 k 也是关节配置的连续函数,而关节配置是不会出现跳变的. 这就保证了只要 k_m 选择适当,机器人就不会因为优化因子 k 而导致关节角速度的震荡.

顺便指出,当机器人非常接近某个奇异关节配置时,有时必须牺牲末端速度跟踪误差、而用阻尼作用才能达到可以接受的关节角速度. 这时的极小化指标就不应是(4)式,而可为:

$$\|J\dot{\theta} - \dot{x}\|^2 + \rho^2 \dot{\theta}^T A \dot{\theta}, \quad (13)$$

其中 ρ^2 为阻尼因子, A 为对角正定归一化阵. 这是阻尼最小方差的指标,本文将不予讨论.

5 算法上的一些考虑

奇异值分解的方法不仅便于理解伪逆和梯度投影法这类方法,而且很容易将这些方法以并行计算的方式高效地加以实现^[7]. 按照奇异值分解定理^[8],雅可比矩阵可以表示为:

$$J = UDV^T = \sum_{i=1}^r \sigma_i u_i v_i^T, \quad (14)$$

其中, $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 和 $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 都是正交矩阵, U 的第 i 列 u_i 称为输出矢量, V 的第 i 列 v_i 称

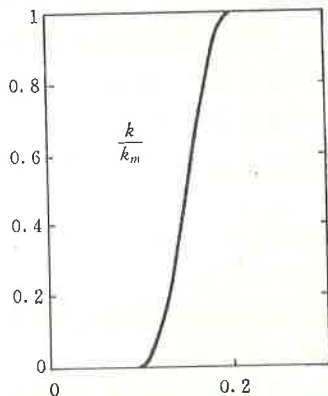


图 1 优化因子随雅可比矩阵最小奇异值而变化的一个例子

为输入矢量, $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$. $D = \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 而 $S = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0, \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_m = 0, \sigma_i, i = 1, 2, \dots, m$ 是 J 矩阵的奇异值, $r = \text{rank}(J)$.

相应地, 雅可比矩阵 J 的伪逆 J^+ 可以表示为:

$$J^+ = \sum_{i=1}^r \frac{1}{\sigma_i} v_i u_i^T, \quad (15)$$

而梯度投影算子

$$I - J^+ J = \sum_{i=r+1}^n v_i v_i^T. \quad (16)$$

这样, 式(9)就可以写成如下的奇异值分解的形式:

$$\dot{\theta} = \sum_{i=1}^r \frac{u_i^T \dot{x}}{\sigma_i} v_i + k \sum_{i=r+1}^n v_i^T \nabla H \cdot v_i. \quad (17)$$

至此, 我们形成以奇异值分解方式实现梯度投影法的计算思路:

第一步, 计算雅可比矩阵;

第二步, 对雅可比矩阵作奇异值分解, 得到 $\sigma_i, u_i, i = 1, 2, \dots, r$ 和 $v_j, j = 1, 2, \dots, n$;

第三步, 根据 σ_r , 按(12)式计算动态优化因子 k ;

第四步, 计算 $\frac{u_i^T \dot{x}}{\sigma_i} v_i, i = 1, 2, \dots, r$, 和 $k v_i^T \nabla H \cdot v_i, i = r+1, \dots, n$, 形成特解和齐次解的各个分量;

第五步, 把第四步中得到的各个分量求和, 求得(9)中的最小方差解.

Maciejewski 和 Reagin^[7]提出了基于奇异值分解计算的逆运动学数值解的并行计算体系结构. 利用该结构, 上述思路很容易就能在具有多个处理器的并行机上实现, 从而产生并行高效的算法, 利于实时地实施本文所提出的控制方案.

6 计算机仿真

我们采用平面三自由度机器人作为仿真对象, 各度量单位分别取为: 长度 m, 角度 deg, 时间 s, 角速度 rad/s, 末端运动速度 m/s.

该机器人三个杆件的长度分别是 3, 1, 1.5, 关节角度以相对关节角表示, 控制变量是末端的空间位置, 因而具有冗余自由度. 开始时刻机器人末端位置为 (0.5536, 0.1535), 此时的相对关节角是 (20.8520, 198.1327, -28.0239). 末端执行器的任务是以 (-0.2, 0.2) 的恒定速度运动 2 秒钟.

我们的次级性能优化指标选为

$$H(\theta) = \sin^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_3. \quad (18)$$

容易知道, 该机器人的关节处于奇异状态当且仅当三个杆件处于同一条线上, 即当且仅当上式为零. 所以, 极大化(18)中的 $H(\theta)$ 某种程度上可以优化关节变量的配置情况, 尽可能避免出现奇异. 选择 $\epsilon_2 = 2\epsilon_1 = 0.16$, 最大优化因子 $k_m = 3$.

仿真结果见图 2 至图 4, 其中的横坐标均为时间(秒). 图 2 是机器人分别在本文方案和定常因子优化这两种方案下的关节角速度范数的比较, 在经过近奇点之后, 本文方案的关节角速度范数明显低, 清楚地表明了本文方案的优点.

现在看一看其它方面. 图 3 是两种方案下的性能指标函数

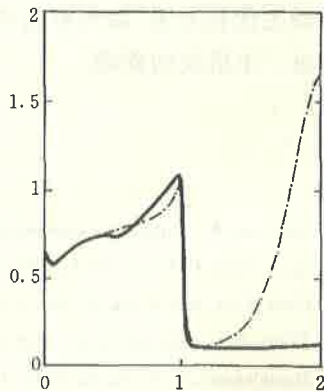


图 2 两种控制方案下的关节角速度范数比较, 实线为本文方案

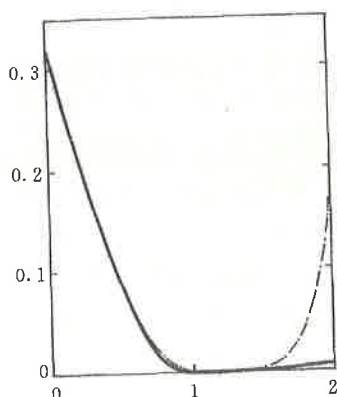


图3 两种控制方案下的性能指标函数 $H(\theta)$ 比较,实线为本文方案

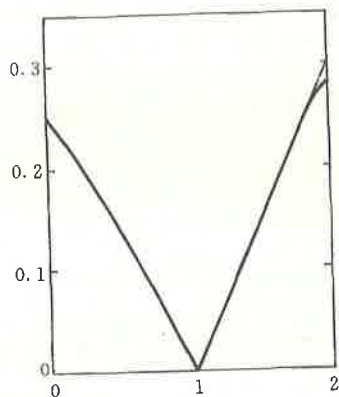


图4 两种控制方案下的最小奇异值比较,实线为本文方案

$H(\theta)$ 比较. 我们看到,本文方案的性能指标在经过近奇点之后变得较低,这是为降低关节速度所付出的代价. 值得指出的是,本文方案下虽然性能指示(18)不如常值方案,但是两者在真正的奇异程度(即性能)上相差甚小. 这点可以从图4看出,其中所画是两种方案下的雅可比矩阵的最小奇异值随时间变化的情况(本文方案的值在最后甚至略大些). 正如前面所指出的,出现这种看似反常的情况,是因为性能指标(18)不能象最小奇异值那样准确的反映机器人关节配置的奇异程度. 所以我们说,本文方案的这个“缺点”在实际控制效果上未必那么明显,甚至不是缺点.

我们注意到,在 $t = 1$ 秒附近,关节最接近奇异配置,图2表明这时虽已停止性能指标优化,但关节角速度仍有轻度跳变. 这说明,这里关节角速度的跳变不是由性能指标引起的. 如果此时施以适当的阻尼,则可以很好地解决这一问题. 具体做法将另文介绍.

7 小 结

本文讨论了分解运动速度控制框架下将梯度投影法应用于冗余机器人控制的一个关键问题,即自运动大小的选择. 我们先分析了确定自运动大小的现有方法,然后提出按机器人关节配置奇异程度来确定自运动优化因子的思想和具体方案. 这种方案的特点是可以用于快速、并行地实施梯度投影法,文中给出了相应的计算思路. 仿真表明本文方案在并行计算上优于现有的动态优化方案. 如何根据特定的机器人和特定任务来自动地选择合适的 ϵ_1, ϵ_2 和 k_m 是一个有待进一步研究的课题.

参 考 文 献

- 1 Liegeois, A. . Automatic supervisory control of the configuration and behavior of multibody mechanisms. IEEE Trans. Syst. , Man, Cybern. , 1977, SMC-7(12): 868—871
- 2 Klein, C. A. and Huang, C. H. . Review of pseudoinverse control for use with kinematically redundant manipulators. IEEE Trans. Syst. , Man, Cybern. , 1983, SMC-13: 245—250
- 3 Maciejewski, A. A. and Klein, C. A. . Obstacle avoidance for kinematically redundant manipulators in dynamically varying environment. Int J Robotics Res. , 1985, 4(3): 109—117
- 4 Euler, J. A. , Dubey, R. A. and Babcock, S. M. . Self-Motion determination based on actuator velocity bounds for redundant manipulators. J. of Robot Systems, 1989, 6(4): 417—425

- 5 李鲁亚. 冗余自由度机器人控制研究. 北京航空航天大学博士学位论文, 1994
- 6 Yoshikawa, T. . Dynamic manipulability of robot manipulators. J. Robot Systems, 1985, 2(1): 113—124
- 7 Maciejewski, A. A. and Reagin, J. M. . A Parallel algorithm and architecture for the control of kinematically redundant manipulators. IEEE Trans. Robotics Automat. , 1994, 10(4): 405—414
- 8 Klema, V. C. and Laub, A. J. . The singular value decomposition; its computation and some applications. IEEE Trans. Automat. Contr. , 1980, AC-25(2): 164—176

A New Application of Gradient Projection Method to RMRC Control Kinematically Redundant Manipulators

HUANG Leiguang and LI Yaotong

(Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences • Beijing, 100080, PRC)

Abstract: Application of gradient projection method to control of redundant robots is discussed under the framework of resolved motion rate control (RMRC). One of key issues in applications of gradient projection method is determination of self-motion. In the paper, existing methods to determine self-motion are analyzed first. Then a new idea and relative scheme are proposed to decide self-motion optimization factor according to joint configuration of robots. This scheme has advantages over exist ones because it is more appropriate to implement gradient projection method fast and parallel. Such a parallel formulation is presented. Numerical simulation shows the efficiency of the scheme.

Key words: gradient projection method; RMRC; redundancy resolution; parallel computation; singular value decomposition

本文作者简介

黄磊光 1967年生. 中科院自动化所博士, 1997年9月赴德国国家信息技术研究中心(GMD)从事博士后研究. 研究兴趣为冗余机器人控制.

李耀通 中国科学院自动化所研究员、博士生导师、国家863计划智能机器人主题专家组组长. 研究兴趣为机器人控制, 神经网络, 计算机视觉. 已于1996年10月去世.