无穷时滞神经网络的全局稳定性

章　毅　钟守铭　　　　王　莉
（电子科技大学应用数学系·成都，610054）（云南工业大学基础部·昆明，650051）

摘要：本文研究具有无穷时滞的神经网络的全局稳定性问题. 通过拓广泛函微分方程理论中的Razumikhin思想，获得了十分简洁的稳定性准则.

关键词：神经网络；无穷时滞；全局稳定性

1 引　言

关于神经网络的研究，近年来已取得了许多重要成果[1~8]. 其中大部分成果都是集中在网络无时滞的情形，对于具有时滞的神经网络的研究，其成果还不多见. 至于对具有无穷时滞的神经网络的研究就更少了. 众所周知，时滞在生物神经网络中是固有的，在人工神经网络中，由于硬件实现中开关延时，参数变化，分布杂散参数等，其时滞特性亦是固有的，只有充分研究时滞特性并在设计中加以考虑，才能使其实现成为可能并开拓新的应用前景[1,3,6].

本文研究如下具有无穷时滞的神络网络

$$\begin{cases} C_i\dfrac{\mathrm{d}u_i(t)}{\mathrm{d}t} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n}[T_{ij}^{(1)}V_j(t) + T_{ij}^{(2)}V_j(t-\tau_{ij}(t)) + \int_{-\infty}^{t}T_{ij}^{(3)}(t-s)V_j(s)\mathrm{d}s] \\ \qquad\qquad - \dfrac{u_i(t)}{R_i} + I_i(t), \quad t \geqslant 0, \\ V_i(t) = g_i(u_i(t)). \qquad\qquad i = 1,2,\cdots,n. \end{cases} \tag{1}$$

其中 $C_i > 0, R_i > 0, T_{ij}^{(1)}, T_{ij}^{(2)}$ 均为常数，$T_{ij}^{(3)}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \tau_{ij}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, I_i: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ 均为连续函数，$\int_0^{+\infty}|T_{ij}^{(3)}(s)|\mathrm{d}s < +\infty, 0 \leqslant \tau_{ij}(t) \leqslant \tau$，这里 τ 是某个常数；$g_i: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是连续可微函数，满足 $g_i(0) = 0$，对任意 $s \in \mathbb{R}, g'_i(t) > 0$.

设(1)具有唯一的平衡态 $(u_1^*, u_2^*, \cdots, u_n^*)$，使得

$$\sum_{j=1}^{n}[T_{ij}^{(1)} + T_{ij}^{(2)} + \int_{-\infty}^{t}T_{ij}^{(3)}(t-s)\mathrm{d}s]V_i^* - \frac{u_i^*}{R_i} + I_i(t) = 0, \quad t \geqslant 0, i = 1,2,\cdots,n.$$

其中 $V_i^* = g_i(u_i^*)$.

我们的目的是要分析平衡态的全局稳定性问题，这是很有意义的研究问题. 事实上，如果我们把稳定的平衡态看成是记忆的话，那么从初始态朝平衡态流动的过程，就是寻找该记忆的过程. 初始态被看成是给定的关于记忆部分信息，这种流动的过程就是从部分信息寻找全部信息的过程. 另一方面，全局稳定性也是人工神经网络中首先必须解决的问题之一[1,7].

从广泛的意义来说，(1)可看成是一泛函微分方程. 在泛函微分方程的理论中，Razumikhin思想有着非常重要的价值，它在稳定性分析中获得了成功的应用[4,5]. 在过去的应用中，多是在某一类函数中引入Razumikhin思想，对于(1)，我们发现单纯在一类函数中引入Razumikhin思想很难解决稳定性问题. 本文中，我们将在两类函数中引入Razumikhin思想，进而去获得(1)的平衡态的全局稳定性条件.

本文于1996年6月27日收到. 1997年3月27日收到修改稿.

设 Ω 是任意 $n \times n$ 矩阵，本文用 $\rho(\Omega)$ 来表示 Ω 的谱半径. $D^+x(t)$ 表示连续函数 $x(t)$ 的 Dini 导数，其定义是

$$D^+x(t) = \overline{\lim_{\Delta t \to 0^+}} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}.$$

2 稳定性分析

设 G_i 是 g_i 的逆函数[2]，即 $u_i \triangleq G_i(V_i) \triangleq g_i^{-1}(V_i),(i=1,2,\cdots,n)$. 显然

$$G_i'(s) = \frac{1}{g_i'(s)} > 0, \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

由于 $g_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是同胚，故(1)可等价地变为

$$G_i'(V_i(t))C_i\frac{\mathrm{d}V_i(t)}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{n}[\tau_{ij}^{(1)}V_j(t) + T_{ij}^{(2)}V_j(t-\tau_{ij}(t) + \int_{-\infty}^{t}T_{ij}^{(3)}(t-s)V_j(s)\mathrm{d}s]$$
$$-\frac{G_i(V_i(t))}{R_i} + I_i(t), \quad t \geqslant 0, \quad i=1,2,\cdots,n. \tag{2}$$

这样，研究(1)的平衡态 $(u_1^*,u_2^*,\cdots,u_n^*)$ 的全局稳定性就等价于研究(2)的平衡态 $(V_1^*,V_2^*,\cdots,V_n^*)$ 的全局稳定性.

对任意 $t_0 \geqslant 0$，设(2)的初始条件为

$$V_i(t) = \psi_i(t), \quad t \in (-\infty, t_0], \quad i=1,2,\cdots,n.$$

其中 $\psi_i(t)$ 是有界连续的函数，我们记

$$\|\psi - V^*\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n}[\sup_{-\infty<t\leqslant t_0}|\psi_i(t) - V_i^*|].$$

定理 1 若系统(2)满足

i) $T_{ii}^{(1)} < 0, \quad (i=1,2,\cdots,n)$;

ii) $\rho(\Omega) < 1$，其中 $\Omega = (\omega_{ij})_{n\times n}$. 且

$$\omega_{ij} = \frac{1}{|T_{ii}^{(1)}|}[|T_{ij}^{(1)}|(1-\delta_{ij}) + |T_{ij}^{(2)}| + \int_0^{+\infty}|T_{ij}^{(3)}(s)|\mathrm{d}s],$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

则系统(2)的平衡态 $(V_1^*,V_2^*,\cdots,V_n^*)$ 是全局一致渐近稳定的.

证 首先我们将(2)改写成

$$G_i'(V_i(t))C_i\frac{\mathrm{d}(V_i(t)-V_i^*)}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{n}[T_{ij}^{(1)}(V_j(t)-V_j^*) + T_{ij}^{(2)}(V_j(t-\tau_{ij}(t)) - V_j^*)$$
$$+\int_{-\infty}^{t}T_{ij}^{(3)}(t-s)(V_j(s)-V_j^*)\mathrm{d}s]$$
$$-\frac{G_i(V_i(t)) - G_i(V_i^*)}{R_i}. \tag{3}$$

因为 $\rho(\Omega) < 1$，故存在常数 $p_i > 0,(i=1,2,\cdots,n)$，使得[9]

$$\frac{1}{p_i}\sum_{j=1}^{n}p_j\omega_{ij} < 1, \quad i=1,2,\cdots,n. \tag{4}$$

对任意 $t_0 \geqslant 0$，令

$$x_i(t) = \frac{1}{p_i}|V_i(t) - V_i^*|, \quad t \geqslant t_0, \quad i=1,2,\cdots,n.$$

以 $x_i(t)$ 求 Dini 导数，由(3)式可得

$$D^+ x_i(t) \leqslant \frac{1}{C_i G_i'(V_i(t))}\Big[T_{ii}^{(1)} x_i(t) + \frac{1}{p_i}\sum_{j=1}^{n} p_j(|T_{ij}^{(1)}|(1+\delta_{ij})x_j(t)$$

$$+ |T_{ij}^{(2)}| x_j(t-\tau_{ij}(t)) + \int_{-\infty}^{t} |T_{ij}^{(3)}(t-s)| x_j(s)\mathrm{d}s\Big]. \tag{5}$$

我们断言，对一切 $t \geqslant t_0$，有下式成立：

$$x_i(t) \leqslant \max_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\frac{1}{p_j}\right) \| \psi - V^* \|_\infty \triangleq m, \quad i = 1,2,\cdots,n. \tag{6}$$

为了证明(6)式，我们先证对 $\forall\, d > 1$，有

$$x_i(t) < dm, \quad i = 1,2,\cdots,n. \tag{7}$$

对 $\forall\, t \geqslant t_0$ 成立. 注意到当 $t \in (-\infty, t_0]$ 时，有 $x_i(t) < dm$，于是，若式(7) 不成立，则必存在 $t_1 > t_0$ 及某个 i，使得

$$x_i(t_1) = dm, \quad x_j(t)\begin{cases} < dm, & j = i, \quad -\infty < t < t_1, \\ \leqslant dm, & j \neq i, \quad -\infty < t \leqslant t_1. \end{cases}$$

于是有 $D^+ x_i(t) \geqslant 0$，另一方面，由(4)，(5)有

$$D^+ x_i(t_1) \leqslant -\frac{dm|T_{ii}^{(1)}|}{C_i G_i'(V_i(t))}\left(1 - \frac{1}{p_i}\sum_{j=1}^{n} p_j \omega_{ij}\right) < 0$$

矛盾，从而(7)式成立. 令 $d \to 1$ 可知(6) 式成立，于是可得平衡态是稳定的.

下面我们再证平衡态是吸引的，即对 $\forall\, \varepsilon > 0$，及任意 $H > 0$，$\exists\, T = T(\varepsilon, H) > 0$，使得当 $\| \psi - V^* \|_\infty < H$ 时，有

$$x_i(t) < \frac{\varepsilon}{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}(p_j)} \triangleq \varepsilon_0, \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

对一切 $t \geqslant t_0 + T$ 成立.

任取一常数 η，使得

$$0 < \eta < \min_{1\leqslant i\leqslant n}\left[\frac{1 - \frac{1}{p_i}\sum\limits_{j=1}^{n} p_j \omega_{ij}}{2\left(1 + \frac{1}{p_i}\sum\limits_{j=1}^{n} p_j \omega_{ij}\right)}\right]\varepsilon_0. \tag{8}$$

因 $\int_0^{+\infty} |T_{ij}^{(3)}(s)|\mathrm{d}s < +\infty$，可取充分大的常数 $C > \tau$ 使得

$$\int_0^{+\infty} |T_{ij}^{(3)}(s)|\mathrm{d}s \leqslant \frac{p_i|T_{ii}^{(1)}|\eta}{m\sum\limits_{j=1}^{n} p_j}. \tag{9}$$

令

$$H_0 \triangleq \frac{H}{\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(p_i)},$$

设 N 是使得 $\varepsilon_0 + N\eta \geqslant H_0$ 的最小正整数，取

$$t_k = t_0 + kT^*,$$

其中

$$T^* = T^*(\varepsilon, H) = C + 4C_i \frac{\max[|G_i(p_i m + |V_i^*|)|, |G_i(-p_i m - |V_i^*|)|] + |G_i(V_i^*)|}{p_i|T_{ii}^{(1)}|\varepsilon_0\left(1 - \frac{1}{p_i}\sum\limits_{j=1}^{n} p_j \omega_{ij}\right)}. \tag{10}$$

下面利用归纳法证明当 $\|\psi - V^*\|_\infty < H$ 时,有

$$x_i(t) < \varepsilon_0 + (N-k)\eta, \quad t \geqslant t_k \tag{11}$$

对所有 $k = 0,1,2,\cdots,N$ 成立.

当 $\|\psi - V^*\|_\infty < H$ 时,由(6)式有

$$x_i(t) \leqslant \max_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\frac{1}{p_j}\right)\|\psi - V^*\|_\infty \leqslant \frac{H}{\min\limits_{1\leqslant j\leqslant n}(p_j)} = H_0 \leqslant \varepsilon_0 + N\eta$$

对 $t \geqslant t_0$ 成立. 表明当 $k = 0$ 时,(11) 式成立.

假设对某个 $k(0 \leqslant k < N)$,(11) 式成立,即当 $\|\psi - V^*\|_\infty < H$ 时,有

$$x_i(t) \leqslant \varepsilon_0 + (N-k)\eta, \quad t \geqslant t_k, \quad i = 1,2,\cdots,n \tag{12}$$

成立,今证当 $\|\psi - V^*\|_\infty < H$ 时,对 $\forall\, t \geqslant t_{k+1}$ 有

$$x_i(t) \leqslant \varepsilon_0 + (N-k-1)\eta, \quad i = 1,2,\cdots,n. \tag{13}$$

为证明(13)式,先证明存在 $\bar{t} \in [t_k + C, t_{k+1}]$ 使得

$$x_i(\bar{t}) \leqslant \varepsilon_0 + (N-k-1)\eta, \quad i = 1,2,\cdots,n \tag{14}$$

成立. 若不然,则有某个 i 及 $\forall\, t \in [t_k + C, t_{k+1}]$, 有

$$x_i(t) > \varepsilon_0 + (N-k-1)\eta. \tag{15}$$

于是由(12),(15),对 $\forall\, t \in [t_k + C, t_{k+1}]$,有

$$\sup_{t-c\leqslant\theta\leqslant t} x_j(\theta) \leqslant \varepsilon_0 + (N-k)\eta < x_i(t) + \eta, \quad j = 1,2,\cdots,n. \tag{16}$$

这样,由(3),(6),(8),(9),(15)和(16),当 $t \in [t_k + C, t_{k+1}]$ 时,
容易求得

$$D^+ |G_i(V_i(t)) - G_i(V_i^*)| \leqslant -\frac{p_i|T_{ii}^{(1)}|}{C_i}\left[\left(1 - \frac{1}{p_i}\sum_{j=1}^n p_j\omega_{ij}\right)x_i(t) - \frac{1}{p_i}\sum_{j=1}^n p_j\omega_{ij}\eta - \eta\right]$$

$$\leqslant -\frac{p_i|T_{ii}^{(1)}|}{2C_i}\left(1 - \frac{1}{p_i}\sum_{j=1}^n p_j\omega_{ij}\right)\varepsilon_0.$$

上式两端从 $t_k + C$ 到 t_{k+1} 积分,有

$$\begin{aligned}|G_i(V_i(t_{k+1})) - G_i(V_i^*)| &\leqslant |G_i(V_i(t_k + C)) - G_i(V_i^*)| \\ &\quad - \frac{p_i|T_{ii}^{(1)}|}{2C_i}\left(1 - \frac{1}{p_i}\sum_{j=1}^n p_j\omega_{ij}\right)\varepsilon_0(t_{k+1} - t_k - C) \\ &\leqslant -\max[|G_i(p_i m + |V_i^*|)|, |G_i(-p_i m - |V_i^*|)|] \\ &\quad - |G_i(V_i^*)| < 0\end{aligned}$$

矛盾,于是(14)成立.

其次证明,对一切 $t \geqslant \bar{t}$, 有

$$x_i(t) \leqslant \varepsilon_0 + (N-k-1)\eta, \quad i = 1,2,\cdots,n. \tag{17}$$

若不然,则存在 $\hat{t} > \bar{t}$ 及某个 i, 使得

$$x_i(\hat{t}) > \varepsilon_0 + (N-k-1)\eta, \quad D^+ x_i(\hat{t}) > 0,$$

从而

$$\sup_{\hat{t}-c\leqslant\theta\leqslant\hat{t}} x_j(\theta) \leqslant \varepsilon_0 + (N-k)\eta < x_i(\hat{t}) + \eta, \quad i = 1,2,\cdots,n. \tag{18}$$

进而由(5),(6),(8),(9)及(18),容易计算得

$$D^+ x_i(\hat{t}) \leqslant -\frac{|T_{ii}^{(1)}|}{C_i G_i'(V_i(t))}\left[\left(1 - \frac{1}{p_i}\sum_{j=1}^n p_j\omega_{ij}\right)x_i(\hat{t}) + \left(1 + \frac{1}{p_i}\sum_{j=1}^n p_j\omega_{ij}\right)\eta\right]$$

$$\leqslant -\frac{\varepsilon_0 |T_{ii}^{(1)}|}{2C_i G_i'(V_i(t))}(1-\frac{1}{p_i}\sum_{j=1}^{n} p_j \omega_{ij}) < 0$$

矛盾，这表明(17)式成立.

注意到 $t_{k+1} \geqslant \hat{t}$，由(17)式可知(13)成立，由归纳法可知，(11)式成立.

在(11)式中，取 $k = N$，当 $\| \psi - V^* \|_\infty < H$ 时，有

$$x_i(t) < \varepsilon_0, \quad i = 1,2,\cdots,n.$$

对一切 $t \geqslant t_0 + T$ 成立. 其中 $T = NT^*$ 与 t_0 无关，于是，当 $\| \psi - V^* \|_\infty < H$ 时，对 $\forall\, t \geqslant t_0 + T$，有

$$|V_i(t) - V_i^*| < \varepsilon, \quad i = 1,2,\cdots,n.$$

综上所述，系统(2)的平衡态是全局一致渐近稳定的.

推论　若系统(2)满足

i)　$T_{ii}^{(1)} < 0, \quad i = 1,2,\cdots,n$;

ii)　$|T_{ii}^{(1)}| > \sum_{j=1}^{n} [|T_{ij}^{(1)}|(1-\delta_{ij}) + |T_{ij}^{(2)}| + \int_0^{+\infty} |T_{ij}^{(3)}(s)| ds], \quad i = 1,2,\cdots,n$. 则系统(2)的平衡态$(V_1^*, V_2^*, \cdots, V_n^*)$是全局一致渐近稳定的.

3　结束语

本文研究了具有无穷时滞的神经网络的全局稳定性问题，我们在两族函数

$$\frac{1}{p_i}|V_i(t) - V_i^*| \text{ 与 } |G_i(V_i(t)) - G_i(V_i^*)|, \quad i = 1,2,\cdots,n$$

中通过引入泛函微分方程理论中的 Razumikhin 思想，获得了简洁的全局稳定性准则，这对于分析、设计人工神经网络显然是有意义的. 另一方面，从数学的角度来看，我们在文中的方法亦是有价值的.

参 考 文 献

1　焦李成. 神经网络系统理论. 西安：西安电子科技大学出版社，1990

2　廖晓昕. Hopfield 型神经网络的稳定性. 中国科学(A 辑)，1993，23(10)：1025－1035

3　Roska，T.，Wu，C. W.，Balsi，M. and Chua，L. O.. Stability and dynamics of delay-type general and cellular neural networks. IEEE Trans. Circuit and Systems-I，1992，39(6)：487－490

4　温立志. 泛函微分方程. 长沙：湖南科学技术出版社，1987

5　Hale，J. K.. Theory of functional differential equations. New York：Spring-Verlag，1977

6　Civalleri，P. P.，Cilli，M.. and Pandolfi，L.. On stability of cellular neural networks with delay. IEEE Trans. Circuit and Systems-I，1993，40(3)：157－165

7　Forti，M.，Manetti，S. and Marini，M.. A condition for global convergence of a class of symmetric neural circuit. IEEE Trans. Circuits and Systems-I，1992，36(6)：480－483

8　Zhang，Y.，Zhong，S. M. and Li，Z. L.. Periodic solutions and stability of Hopfield neural networks with variable delays. Int. J. Sys. Sci.，1996，27(9)：895－901

9　Siljak，D. D.. Large scale dynamic systems：stability and structure. New York：Elsevier North-Holland，Inc.，1978，394－406

Global Stability of Neural Networks with Infinite Delay

ZHANG Yi and ZHONG Shouming
(Department of Applied Mathematics, University of Electronic Science and Technology of China · Chengdu, 610054, PRC)
WANG Li
(Department of Basic Science, Yun Nan Potylechnic · Kunming, 650051, PRC)

Abstract: This paper studies the global stability of neural networks with infinite delay. By developing the Razumikhin technique of the theory of functional differential equations, simple stability criteria are obtained.

Key words: neural networks; infinite delay; global stability

本文作者简介

章 毅 1963年生. 1983年在四川师范大学数学系获学士学位, 1986年在内蒙古师范大学获硕士学位, 1994年在中国科学院数学研究所获博士学位. 现为电子科技大学计算机科学与工程系教授. 研究方向为常微分方程的稳定性, 泛函微分方程的稳定性及神经网络.

钟守铭 1955年生. 1982年在电子科技大学应用数学系获学士学位. 现为电子科技大学应用数学系教授. 目前研究方向是微分方程稳定性理论及应用, 鲁棒控制, 神经网络等.

王 莉 1963年生. 1983年在四川师范大学数学系获学士学位, 现为云南工业大学基础部副教授. 目前研究方向是微分方程与应用, 运筹学.

中 国 科 技 期 刊 排 行 表

(按被引频次和影响因子排序)

数学类:

名次	期 刊 名 称	被引频次	名次	期 刊 名 称	影响因子
1	数学学报	306	1	控制理论与应用	0.2348
2	应用数学和力学	184	2	计算数学	0.2184
3	应用数学学报	157	3	数值计算与计算机应用	0.1818
4	计算数学	148	4	应用概率统计	0.1724
5	数学年刊. A	134	5	数学学报	0.1591
6	系统科学与数学	117	6	系统科学与数学	0.1579
7	控制与决策	108	7	系统工程学报	0.1573
8	系统工程理论与实践	104	8	应用数学学报	0.1486
9	数学研究与评论	86	9	高等学校计算数学学报	0.1413
10	应用概率统计	85	10	J Comput Math	0.1389

说明:

1. 中国科学引文数据库在连续两年公布《被引频次最高的中国科技期刊100名排行表》的基础上, 为使统计数据的排列从多种角度反映科技期刊状况, 特从1996年开始按学科编制《中国科技期刊排行表(按被引频次和影响因子排序)》.

2. 被引频次是在对被中国科学引文数据库1996年582种来源期刊所引用的数千种中国出版的中英文期刊进行频次统计后编制而成.

3. 影响因子的计算方法如下:

$$1996\text{年某刊的影响因子} = \frac{1996\text{年引用}1994\text{年和}1995\text{年该刊刊载论文的总次数}}{1994\text{年和}1995\text{年该刊刊载论文的总次数}}$$

本表中1996年的影响因子是在对中国科学引文数据库1994年—1995年的来源期刊作了统计后编制而成. 由于计算影响因子受到期刊发文量数据的限制, 因此, 本表中只对能在中国科学引文数据库获得发文量数据的315种期刊作了统计. 1996年新增加的267种来源期刊因无发文量数据而未作统计.

4. 本着尊重原始数据的原则, 本表对变名期刊未作任何合并处理.

①数据来源: 中国科学院文献情报中心中国科学引文数据库1996年数据.

本表由中国科学引文数据库统计编制.