

模型误差界的频域辨识方法分析

高 江

戴冠中

(西安交通大学系统工程研究所·西安, 710049) (西北工业大学自控系·西安, 710072)

摘要: 模型误差界的确定是系统辨识中一个重要的组成部分. 本文应用截尾傅氏变换和 H_∞ 辨识理论, 对模型误差界的常规频域辨识方法进行了分析, 给出了传递函数的频率响应误差界和总体误差界, 对 Baryard 等人的频域误差界估计方法做了修正.

关键词: 频域辨识; 模型误差界; H_∞ 辨识

1 前 言

近年来, 鲁棒辨识特别是 H_∞ 辨识理论受到了人们的广泛重视. H_∞ 辨识假设系统受到未知的有界噪音的干扰, 根据对系统的先验假设和有限个频率响应样本观测值, 得到系统的有理函数近似. 除此以外, H_∞ 辨识在 $\max_{\min}$ 的意义下建立模型的误差容限, 并用以推断算法的鲁棒收敛和渐近最优性. 由于现代的鲁棒控制理论是建立在已知模型误差界的基础上的, 因此, H_∞ 辨识为鲁棒控制策略的实施创造了条件, 是一种面向鲁棒控制的系统辨识理论^[2~5].

与模型误差界鲁棒估计方法的研究相平行, Baryard 等^[1]给出了在常规频域辨识算法中用残差和谐估计辨识模型误差界的方法, 并将得到的误差界应用于大型空间机构的鲁棒控制问题中. 通过分析我们认为该算法有如下缺点: 第一, 算法所使用的谱估计方法受到有限时窗效应的影响, 算法中并未考虑这一效应所产生的辨识误差; 第二, 算法给出的是传递函数在有限频率样点上的误差界, 而不是在任意频率样点上的总体误差界. 基于上述考虑, 本文对 Baryard 等人频域辨识算法的误差界进行了定量分析, 给出了一个误差上界. 该误差界是对 Baryard 等人的估计结果的修正.

2 模型误差界的频域估计

本节引入常规频域辨识问题的描述及 Baryard 等人的模型误差界频域辨识方法.

2.1 频域辨识问题的描述

常规频域辨识方法由系统频率响应的辨识和模型参数化两步组成. 近年来为了适应鲁棒控制的需要, 又提出了模型误差界辨识的环节. 系统频域响应的辨识可以用正弦波或统计分析的方法来完成. 其中统计分析方法是在对象输入端加伪随机信号或直接利用对象输入端本身存在的随机噪音, 观测对象的响应得到系统的频率特性, 其辨识过程可用下列随机系统描述:

$$z(k) = h(k) * u(k) + n(k). \quad (1)$$

其中, $h(k)$ 为待辨识系统的冲击响应, 其传递函数为 $H(z)$. 系统输入 $u(k)$ 为(伪)随机白噪音序列, 满足

$$E\{u^2(k)\} = \sigma_u^2, \quad (2)$$

系统观测噪音 $n(k)$ 为与输入无关的随机扰动,

$$E\{n^2(k)\} = \sigma_n^2, \quad (3)$$

则有如下的标准关系

* 中国博士后科学基金资助项目.

本文于 1996 年 1 月 30 日收到, 1996 年 10 月 14 日收到修改稿.

$$r_{uu}(i) = E\{u(k)u(k+i)\} = \sigma_u^2 \delta(i), \quad r_{uz}(i) = E\{u(k)z(k+i)\} = \sigma_u^2 h(i), \quad (4)$$

$$P_{uu}(z) = Z\{r_{uu}\} = \sigma_u^2, \quad P_{uz}(z) = Z\{r_{uz}\} = \sigma_u^2 H(z). \quad (5)$$

其中, r_{uu} 与 $P_{uu}(z)$ 分别为系统输入信号 $u(k)$ 的自相关与功率谱, r_{uz} , $P_{uz}(z)$ 为 $u(k)$ 与 $z(k)$ 的互相关序列与互相关谱.

$P_{uu}(\omega)$, $P_{uz}(\omega)$ 可以用谱估计的方法得到. 由(5)式可见, 系统频域响应可由下式估计

$$\bar{H}(z) = \frac{P_{uz}(z)}{P_{uu}(z)}, \quad (6)$$

其中 $z = \exp\{j2\pi(k-1)/n\}$, $0 < k \leq n$, n 为时窗长度. 利用反变换法或频率域模型拟合方法可由 $\bar{H}(z)$ 得到系统的参数模型.

2.2 模型误差界的频域估计^[1]

设由(6)式得到的系统参数模型为 $\hat{H}(z)$, 其冲击响应为 $\{\hat{h}(k)\}$, Baryard 等用如下方法估计模型的误差界.

首先作残差序列

$$\tilde{z} = z - \hat{h}(k) * u(k) = [h(k) - \hat{h}(k)] * u(k) + n(k). \quad (7)$$

残差 $\tilde{z}(k)$ 与系统输入 $u(k)$ 的互相关谱满足

$$P_{\tilde{z}u} = \sigma_u^2 [H(z) - \hat{H}(z)], \quad (8)$$

$$\text{可见, 模型误差界为} \quad |H(z) - \hat{H}(z)| = \left| \frac{P_{\tilde{z}u}}{P_{uu}} \right|. \quad (9)$$

文[1]将该模型误差界用于大型空间机构的鲁棒控制问题中.

3 有限频率样点上的误差界

Baryard 等的模型误差界估计(9)受到有限时窗效应的影响, 上述算法中并未考虑到这一误差. 本节应用截尾傅氏变换误差分析方法给出系统频域响应在有限样点上的误差界. 定义 D_ρ 为 $|z| \leq \rho$ 的复数 z 的集合, $\text{BH}_{\infty, \rho}(M)$ 是满足 $\sup_{z \in D_\rho} |f(z)| < M$, 定义于 D_ρ 上的复值解析函数 $f(z)$ 的集合, 则有下列的定理.

定理 1 设 $H(z) \in \text{BH}_{\infty, \rho}(M)$, $\hat{H}(z) \in \text{BH}_{\infty, \rho}(M)$, $(\rho, M) \in (1, \infty] \times [0, \infty)$, 则在有限频率样点上, $\hat{H}(z)$ 的频域响应满足如下的误差界

$$|\hat{H}(z) - H(z)| \leq |E_0| + \delta, \quad (10)$$

$$\text{其中} \quad E_0 = E\left[\frac{P_{\tilde{z}u}}{P_{uu}}\right], \quad \delta = 2M \frac{\rho^{-n}}{\rho - 1}. \quad (11)$$

$z = \exp(j2\pi(k-1)/n)$, $0 < k \leq n$, n 为时窗长度.

证 根据系统假设 $H(z) \in \text{BH}_{\infty, \rho}(M)$, $\hat{H}(z) \in \text{BH}_{\infty, \rho}(M)$, $(\rho, M) \in (1, \infty] \times [0, \infty)$, 可推得^[2]

$$|h(k)| \leq M\rho^{-k}, \quad |\hat{h}(k)| \leq M\rho^{-k}. \quad (12)$$

$$\begin{aligned} |\hat{H}(z) - H(z)| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \hat{h}(k) \exp(j2\pi(k-1)/n) - \sum_{k=1}^{\infty} h(k) \exp(j2\pi(k-1)/n) \right| \\ &\leq \left| \sum_{k=1}^n \hat{h}(k) \exp(j2\pi(k-1)/n) - \sum_{k=1}^n h(k) \exp(j2\pi(k-1)/n) \right| \\ &\quad + \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \hat{h}(k) \exp(j2\pi(k-1)/n) \right| + \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} h(k) \exp(j2\pi(k-1)/n) \right| \\ &\leq \left| \sum_{k=1}^n \hat{h}(k) \exp(j2\pi(k-1)/n) - \sum_{k=1}^n h(k) \exp(j2\pi(k-1)/n) \right| \end{aligned}$$

$$+ 2M \frac{\rho^{-n}}{\rho - 1}. \quad (13)$$

n 为时窗长度. 由(7)式

$$E_0 = Z \left[\frac{\sigma_u^2 h(k) - \sigma_u^2 \hat{h}(k)}{\sigma_u^2} \right] = \sum_{k=1}^n h(k) \exp(j2\pi(k-1)/n) - \sum_{k=1}^n \hat{h}(k) \exp(j2\pi(k-1)/n). \quad (14)$$

将(14)式代入(13)式可知定理成立. 证毕.

在一种理想的情况下, 即当时窗长度趋于无穷大时, (10)式右端第二项趋于零, 同时, 统计估计算法的方差趋于零

$$\frac{P_{zu}}{P_{uu}} \rightarrow E \left[\frac{P_{zu}}{P_{uu}} \right] = E_0.$$

本节得到的误差界(10)就还原为 Baryard 等人给出的结果(9). 然而在一般情况下, 有限时窗所引起的样本估计误差常常不能忽略, 应计入定理 1 所给出的误差界附加项.

4 任意频率点上的总体误差界

上面得到的仅是传递函数在有限频率样点上的频率响应误差界, 为了给出传递函数的误差上界, 还需要计算系统在全频率范围的整体误差界. 为此, 首先引入如下结论.

引理 1^[4] 设 $\hat{F} \in \text{BH}_{\infty, \rho}(M)$, $(\rho, M) \in (1, \infty] \times [0, \infty)$, 在有限频率样点上满足

$$\hat{F}(e^{j2(k-1)\pi/n}) = \hat{f}_{k,n}, \quad |\hat{f}_{k,n}| \leq \delta, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

则对于任意满足 $0 < m < l \leq n - m$ 的整数 l, m 有

$$\|\hat{F}\|_{\infty} \leq \delta \sqrt{\frac{l+m}{l-m}} + M\rho^{-(2m+1)}(1 + \sqrt{\frac{l+m}{l-m}}). \quad (15)$$

利用引理 1 可以得到下面的定理.

定理 2 设传递函数 $\hat{H}(z)$ 与 $H(z)$ 的频域响应在有限频率样点上的最大误差不超过 ϵ , 即

$$|\hat{H}(z) - H(z)| \leq \epsilon, \quad (16)$$

其中 $z = \exp(j2\pi(k-1)/n)$, $1 \leq k \leq n$, $\hat{H}(z) \in \text{BH}_{\infty, \rho}(M)$, $H(z) \in \text{BH}_{\infty, \rho}(M)$, $(\rho, M) \in (1, \infty] \times [0, \infty)$, $\epsilon \in [0, \infty)$, 则系统模型误差的上界为

$$\|H(z) - \hat{H}(z)\|_{\infty} \leq \epsilon \sqrt{\frac{l+m}{l-m}} + 2M\rho^{-(2m+1)}(1 + \sqrt{\frac{l+m}{l-m}}). \quad (17)$$

其中 m, l 是满足 $0 < m < l \leq n - m$ 的任意整数.

证 由定理的假设 $\hat{H}(z) \in \text{BH}_{\infty, \rho}(M)$, $H(z) \in \text{BH}_{\infty, \rho}(M)$, 可知

$$H(z) - \hat{H}(z) \in \text{BH}_{\infty, \rho}(2M). \quad (18)$$

由(16), (18)式及引理 1 可推出(17)式. 证毕.

上述定理 2 适用于系统传递函数频率响应在频率样点上具有一致误差界的情况, 未考虑误差界随频率样点的变化, 因此在一般情况下会导致保守的结果. 借鉴文[5]的思想, 我们在下面给出一种基于频率加权的误差界, 通过权函数将随频率样点变化的误差界转化为一致的误差界. 可以预料, 这种方法能够使系统总体误差界估计的保守性降低.

定理 3 引入权函数 $\hat{w}_e$, $|\hat{w}_e| > 0$, 在有限频率样点 $e^{j2(k-1)\pi/n}$, $k = 1, 2, \dots, n$ 上满足

$$\hat{w}_e \geq |E_0| + \delta \geq |\hat{H}(z) - H(z)|, \quad (19)$$

且有稳定的逆 $\hat{w}_e^{-1} \in \text{BH}_{\infty, \rho_w}(M_w)$, $(\rho_w, M_w) \in (1, \infty] \times [0, \infty)$, 则系统在任意频率样点上满足如下的总体误差界

$$\|\hat{H}(z) - H(z)\|_{\infty} \leq \hat{w}_e \sqrt{\frac{l+m}{l-m}} + 2\hat{w}_e M_0 \rho_0^{-(2m+1)} (1 + \sqrt{\frac{l+m}{l-m}}). \quad (20)$$

其中 m, l 是满足 $0 < m < l \leq n - m$ 的任意整数, $M_0 = MM_w$, $\rho_0 = \min(\rho_w, \rho)$.

证 由定理的条件(19)式, 在有限频率样点上

$$|\hat{H}(z) - H(z)| \leq \hat{w}_e, \quad (21)$$

根据定理假设, 上式等价于

$$|\hat{w}_e^{-1} \hat{H}(z) - \hat{w}_e^{-1} H(z)| = |\hat{w}_e^{-1} [\hat{H}(z) - H(z)]| \leq 1. \quad (22)$$

且

$$\hat{w}_e^{-1} \hat{H}(z) \in \text{BH}_{\infty, \rho_0}(M_0), \quad \hat{w}_e^{-1} H(z) \in \text{BH}_{\infty, \rho_0}(M_0),$$

因此

$$\hat{w}_e^{-1} \hat{H}(z) - \hat{w}_e^{-1} H(z) \in \text{BH}_{\infty, \rho_0}(2M_0). \quad (23)$$

应用上述引理 1 知

$$\|\hat{w}_e^{-1} \hat{H}(z) - \hat{w}_e^{-1} H(z)\|_{\infty} \leq \sqrt{\frac{l+m}{l-m}} + 2M_0 \rho_0^{-(2m+1)} (1 + \sqrt{\frac{l+m}{l-m}}). \quad (24)$$

对单输入单输出系统, 由上式可推得

$$\|\hat{H}(z) - H(z)\|_{\infty} \leq \hat{w}_e \sqrt{\frac{l+m}{l-m}} + 2\hat{w}_e M_0 \rho_0^{-(2m+1)} (1 + \sqrt{\frac{l+m}{l-m}}). \quad \text{证毕.}$$

定理 3 中的权函数可用插值的方法构造. 在保证满足定理 3 条件的权函数存在的条件下, 该权函数在频率样点 $e^{j2(k-1)\pi/n}$, $k = 1, 2, \dots, n$ 上的频率响应应尽可能逼近上一节所得到的系统有限样点频率响应误差界. 通过引入权函数 $\hat{w}_e$, 可以满足系统频率响应误差界随频率而变化的情况, 在一定程度上减小了总体误差界估计的保守性, 但引入了构造权函数的额外工作. 定理 2 和定理 3 给出的总体误差界可应用于鲁棒控制等问题中.

5 仿 真

应用频域辨识方法对如下四阶 ARMA 模型进行辨识:

$$H(z) = \frac{-0.040907z^3 - 0.036666z^2 + 0.215072z - 0.140035}{z^4 - 3.5887z^3 + 4.9960z^2 - 3.1890z + 0.7895}.$$

系统输入是方差为 1 的白噪声序列; 系统输出加入方差为 0.1 的高斯白噪. 应用定理 1 的误差界频域辨识方法对模型辨识结果在有限样点上的频率响应误差界进行估计. 仿真中用 $\frac{P_{zu}}{P_{uu}}$ 近似定理 1 中的 E_0, M, ρ 取为系统的实际值, 估计结果如图 1 所示. 辨识结果与实际情况符合较好. 在此基础上可以得到较紧的总体误差界估计.

6 结 论

本文首先应用截尾傅氏变换误差分析方法定量分析了常规频域辨识中的有限时窗效应, 对文[1]所给出的传递函数在有限频率样点上的频率响应误差界作了修正. 之后, 引入文[4]的结果, 根据传递函数在有限样点上的频率响应误差界得到系统总体误差界, 给出了当系统频率响应受未知有界噪声干扰时, 一致

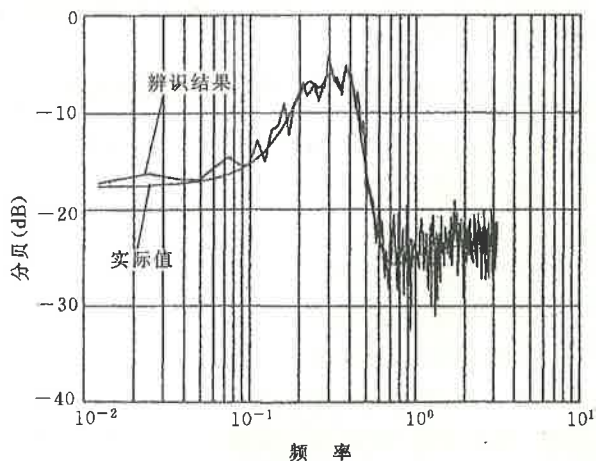


图 1 有限频率样点上的误差界估计

和频域加权的两种误差界形式,可应用于鲁棒控制等问题中。

本文的结论为文[1]的方法提供了理论依据。由于当前模型误差界的鲁棒估计方法普遍存在的保守性问题,因此,频域估计方法仍然具有重要的实用意义,这一点已在文[1]的实例分析中得到了验证。通过引入随机变量的期望值,本文也得到了建立在随机信号基础上的常规频域辨识理论与确定信号假设基础上的 H_∞ 辨识理论间的一些联系。

参 考 文 献

- 1 Baryard, D. S. et al. . Automated on-orbit frequency domain identification for large space structures. *Automatica*, 1991, 27(6): 931—946
- 2 Helmicki, A. J. , Jacobson, A. and Nett, C. N. . Fundamentals of control oriented system identification: a worst-case/deterministic approach in H_∞ . *IEEE Trans. Automat. Control*, 1991, AC-36(10): 1163—1176
- 3 Gu, G. and Khargonekar, P. P. . A class of algorithms for identification in H_∞ . *Automatica*, 1992, 28(2): 299—312
- 4 Gu, G. , Xiong, D. P. and Zhou, K. M. . Identification in H_∞ using Pick's interpolation. *Systems & Control Letters*, 1993, 20(6): 263—272
- 5 Helmicki, A. J. , Jacobson, A. and Nett, C. N. . H_∞ identification of stable LSI systems: a scheme with direct application to controller design. *Prco. ACC*, 1989, 1428—1434

On the Frequency-Domain Method for the Determination of Model Error Bounds

GAO Jiang

(Institute of Systems Engineering, Xi'an Jiaotong University • Xi'an, 710049, PRC)

DAI Guangzhong

(Department of Automatic Control, Northwestern Polytechnical University • Xi'an, 710072, PRC)

Abstract: The determination of model error bound is an important component of system identification algorithms. In this paper, truncated Fourier transform and H_∞ identification theory are used to analyze the error bound estimated by the conventional frequency-domain identification algorithms. Error bounds on the finite point samples of plant frequency response and the worst-case error bound of the plant are provided. These error bounds are corrections to the model error bounds obtained using Baryard's frequency-domain method.

Key words: Frequency-domain identification; model error bound; H_∞ identification

本文作者简介

高 江 1969年生。1990年毕业于西安交通大学信息与控制工程系,获学士学位,1996年于西北工业大学自动控制系统获博士学位,现在西安交通大学做博士后研究。研究方向为系统辨识与最优估计,计算机视觉,工业生产过程的调度、监控与仿真。

戴冠中 见本刊1998年第1期第23页。