第 15 卷第 2 期
1998 年 4 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 15, No. 2
Apr., 1998

具有滞后输入的不确定系统的鲁棒镇定*

俞 立 褚 健
(浙江大学工业控制研究所·杭州,310027)

摘要:本文研究具有滞后输入的不确定系统的鲁棒镇定问题,导出了系统可以用一个无记忆状态反馈控制律鲁棒镇定的条件,据此,提出了一个鲁棒稳定化控制器的设计方法.

关键词:不确定系统;时滞;鲁棒镇定

1 引 言

近年来,对时滞系统的鲁棒镇定问题研究已取得了很大的进展.不仅在理论上提出了一些有效的分析和综合方法[1~7],而且在应用上也取得了一定的成功[8].然而现有的大多数文献考虑的是具有滞后状态的不确定时滞系统,具有滞后输入的系统却很少被研究[6].文献[6]推广了由 Petersen 和 Hollot 提出的不确定系统二次镇定的 Riccati 方程处理方法[9]到具有滞后输入的不确定时滞系统的鲁棒镇定问题研究中,提出了一种鲁棒稳定化状态反馈控制律的设计方法.这种方法在于首先假定了控制律的结构形式,然后导出一个这样的控制律存在的条件.显然,这种事先假定控制器结构的方法具有一定的保守性.

本文研究具有滞后输入不确定系统的鲁棒镇定问题.对一般结构的无记忆定常线性状态反馈控制律,提出了系统鲁棒能镇定的条件,进而证明了这样一个条件成立当且仅当某个代数矩阵 Riccati 方程有正定解.若这样一个正定解存在,则可以利用这个正定解矩阵构造一个鲁棒稳定化状态反馈控制律.

2 问题的描述

考虑由以下状态方程描述的不确定线性时滞系统

$$\dot{x}(t) = [A + \Delta A(t)]x(t) + [B + \Delta B(t)]u(t) + [B_d + \Delta B_d(t)]u(t-d), \tag{1}$$

其中 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 是状态向量,$u(t) \in \mathbb{R}^m$ 是控制输入向量,A, B 和 B_d 是描述名义系统的适当维数的常数矩阵,$\Delta A(\cdot), \Delta B(\cdot)$ 和 $\Delta B_d(\cdot)$ 是适当维数的不确定实值矩阵,它们反映了系统模型中的时变参数不确定性,$d > 0$ 是滞后常数.

不失一般性,本文考虑的参数不确定性假定具有以下的形式

$$[\Delta A(\cdot) \quad \Delta B(\cdot)] = HF(\cdot)[E_1 \quad E_2], \quad \Delta B_d(\cdot) = H_d F(\cdot) E_d, \tag{2}$$

其中 H, H_d, E_1, E_2 和 E_d 是适当维数的常数矩阵,$F(t) \in \mathbb{R}^{i \times j}$ 是一个具有 Lebesgue 可测元的未知矩阵,且满足

$$F'(t)F(t) \leqslant I, \tag{3}$$

上式中的 I 表示适当维数的单位矩阵.

本文要研究的问题是:对给定的不确定时滞系统(1)~(3).设计一个无记忆状态反馈控制律

$$u(t) = -Kx(t), \tag{4}$$

* 浙江省自然科学基金(6960231)、国家自然科学基金资助课题.

本文于 1996 年 2 月 13 日收到.1997 年 4 月 22 日收到修改稿.

其中 $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 是反馈增益常数矩阵，使得对任意允许的不确定性，导出的闭环系统

$$\dot{x}(t) = [A - BK + HF(t)(E_1 - E_2K)]x(t) - [B_d + H_dF(t)E_d]Kx(t-d) \tag{5}$$

是二次稳定的. 为此，首先引进有关时滞系统二次稳定性的概念.

定义 如果存在 n 阶实对称矩阵 $P > 0, R \geqslant 0$ 和一个正常数 $\alpha > 0$，使得对所有允许的不确定性 $F(t)$，沿闭环系统(5)的任意轨线，以下的 Lyapunov 泛函

$$V(x_t) = x'(t)Px(t) + \int_{t-d}^{t} x'(\tau)Rx(\tau)\mathrm{d}\tau$$

关于时间的导数满足

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(x_t) = {} & x'(t)[P(A-BK) + (A-BK)'P + R]x(t) + 2x'(t)PHF(t)(E_1 - E_2K)x(t) \\ & - 2x'(t)P[B_d + H_dF(t)E_d]Kx(t-d) - x'(t-d)Rx(t-d) \\ \leqslant {} & -\alpha\|x(t)\|^2,\end{aligned} \tag{6}$$

则闭环系统(5)称为是二次稳定的. 对系统(1)～(3)，如果存在一个无记忆线性状态反馈控制律(4)，使得闭环系统(5)是二次稳定的，则系统(1)～(3)称为是鲁棒二次能镇定的，此时，控制律(4)称为是系统(1)～(3)的一个无记忆状态反馈鲁棒稳定化控制律.

根据[10]，如果系统(5)是二次稳定的，则该系统是 Lyapunov 意义下渐近稳定的.

3 鲁棒稳定化控制器设计

首先我们给出闭环时滞系统(5)二次稳定的一个充分条件.

定理 1 如果存在正定对称矩阵 $P, R \in \mathbb{R}^{n\times n}$，使得

$$\begin{aligned}S := {} & P(A-BK) + (A-BK)'P + P(HH' + B_dR^{-1}B_d' + H_dH_d')P \\ & + (E_1 - E_2K)'(E_1 - E_2K) + K'RK + K'E_d'E_dK < 0,\end{aligned} \tag{7}$$

则对所有允许的不确定性，闭环系统(5)是二次稳定的.

证 如果存在矩阵 $P > 0, R > 0$，使得(7)式成立，考虑以下的 Lyapunov 泛函

$$V(x_t) = x'(t)Px(t) + \int_{t-d}^{t} x'(\tau)(K'RK + K'E_d'E_dK)x(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

显然 $V(x_t)$ 是正定的，沿系统(5)的任意轨线，$V(x_t)$ 关于时间的导数是

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(x_t) = {} & x'(t)[P(A-BK) + (A-BK)'P + K'RK + K'E_d'E_dK]x(t) \\ & + 2x'(t)PHF(t)(E_1 - E_2K)x(t) - 2x'(t)PB_dKx(t-d) \\ & - 2x'(t)PH_dF(t)E_dKx(t-d) \\ & - x'(t-d)(K'RK + K'E_d'E_dK)x(t-d).\end{aligned} \tag{8}$$

由于对任意向量 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ 和对称正定矩阵 $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$，有

$$\alpha'\beta + \beta'\alpha \leqslant \alpha'R^{-1}\alpha + \beta'R\beta.$$

因此，有

$$2x'(t)PHF(t)(E_1 - E_2K)x(t) \leqslant x'(t)PHH'Px(t) + x'(t)(E_1 - E_2K)'(E_1 - E_2K)x(t),$$

$$-2x'(t)PB_dKx(t-d) \leqslant x'(t)PB_dR^{-1}B_d'Px(t) + x'(t-d)K'RKx(t-d),$$

$$-2x'(t)PH_dF(t)E_dKx(t-d) \leqslant x'(t)PH_dH_d'Px(t) + x'(t-d)K'E_d'E_dKx(t-d).$$

把以上不等式代入到(8)式，并利用条件(7)，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(x_t) \leqslant x'(t)Sx(t) \leqslant \lambda_{\max}(S)\|x(t)\|^2 < 0,$$

其中 $\lambda_{\max}(S)$ 表示矩阵 S 的最大特征值. 取 $\alpha = -\lambda_{\max}(S) > 0$，则定义中的不等式(6)成立，由

此得证定理.

定义

$$\overline{E}_1=[E_1' \quad 0 \quad 0]',\quad \overline{E}_2=[E_2' \quad R^{1/2} \quad E_d']',\quad D=[H \quad B_dR^{-1/2} \quad H_d],$$

则矩阵不等式(7)可以写成

$$S=P(A-BK)+(A-BK)'P+P\overline{DD}'P+(\overline{E}_1-\overline{E}_2K)'(\overline{E}_1-\overline{E}_2K)<0. \quad (9)$$

定理 2 对一个给定的正定对称矩阵 $R\in\mathbb{R}^{n\times n}$,存在矩阵 $K\in\mathbb{R}^{m\times n}$,使得矩阵不等式(9)有一个正定对称解当且仅当存在一个正常数 $\varepsilon>0$,使得以下的代数矩阵 Riccati 方程

$$(A-BME_2'E_1)'P+P(A-BME_2'E_1)+P(HH'+B_dR^{-1}B_d'+H_dH_d'-BMB')P$$
$$+E_1'(I-E_2ME_2')E_1+\varepsilon I=0 \quad (10)$$

有一个正定对称解,其中 $M=(E_2'E_2+E_d'E_d+R)^{-1}$. 进而,如果这样一个正定解存在,则

$$u(t)=-Kx(t),\quad K=M(B'P+E_2'E_1) \quad (11)$$

是系统(1)～(3)的一个无记忆状态反馈鲁棒稳定化控制律.

证 假定存在常数 $\varepsilon>0$,使得 Riccati 方程(10)存在一个正定解 P,我们将证明对由(11)式 给出的矩阵 K,矩阵不等式(9) 成立. 事实上,将矩阵 K 代入到(9)式中,经过代数运算并利用方程(10),可以得到

$$S=-\varepsilon I<0.$$

反之,若存在正定对称矩阵 P,使得矩阵不等式(9) 成立,则类似文献[11]中的定理 3.3 的证明,可得:存在 $\varepsilon>0$, 使得矩阵 Riccati 方程(10)有一个正定解. 综合之,得证定理.

在现有的文献中,例如[6],采用的鲁棒稳定化控制律设计方法是在给定反馈增益矩阵 K 的一个结构后,导出一个使得闭环系统是二次稳定的充分条件,进而由满足该条件的某个正定对称矩阵得到所需要的稳定化控制律. 而定理 2 给出的是对所有可能的反馈增益常数矩阵 K,(7)式存在正定解的一个充分必要条件. 显然,这大大降低了以往方法可能引进的保守性.

类似文献[7]中的定理 4,我们可以证明:如果存在 $\varepsilon>0$,使得矩阵 Riccati 方程(10) 有一个正定解,则对任意常数 $\tilde{\varepsilon}\in[0 \quad \varepsilon]$,方程(10) 也有一个正定解. 因此我们可以采用不断减小 ε 的方法来检验方程(10) 的正定解的存在性. 但是对于如何选择一个适当的正定对称矩阵 R,以使得方程(10)存在一个正定解,目前尚无指导性的方法.

4 数值例子

考虑不确定时滞系统(1),其中

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},\quad B_d=\begin{bmatrix}0.1\\ 0\end{bmatrix},$$

$$\Delta A=\begin{bmatrix}0 & 0\\ r(t) & s(t)\end{bmatrix},\quad \Delta B=\begin{bmatrix}0\\ s(t)\end{bmatrix},\quad \Delta B_d=\begin{bmatrix}0\\ s(t)\end{bmatrix}.$$

不确定参数 $r(t),s(t)$ 满足 $|r(t)|\leqslant 0.1,|s(t)|\leqslant 0.1$. 不难得到(2)式中的有关矩阵是

$$H=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0.1 & 0.1\end{bmatrix},\quad E_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad E_2=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},$$

$$H_d=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0.1\end{bmatrix},\quad E_d=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},\quad F(t)=\begin{bmatrix}10r(t) & 0\\ 0 & 10s(t)\end{bmatrix}.$$

其中 $F(t)$ 满足(3). 针对这样的一个不确定时滞系统,要求设计一个无记忆状态反馈控制律,使得对任意允许的不确定参数取值,闭环系统保持是稳定的.

为此,根据本文提出的方法,在定理 2 中,取 $R=0.5$,则得到 $M=0.4$,取 $\varepsilon=0.01$, 则相

应的 Riccati 方程(10)存在一个正定解. 因此,该系统可以用一个无记忆状态反馈控制律(4)二次鲁棒镇定,并且根据(11)式,一个稳定化控制律是

$$u(t) = -[3.9958 \quad 1.8672]x(t).$$

5 结 论

本文研究了具有控制滞后的不确定系统的鲁棒镇定问题,提出了一个无记忆线性状态反馈稳定化控制律的设计方法. 最后用一个数值例子验证了所提出方法的有效性.

参 考 文 献

1 Shen, J. C., et al.. Memoryless stabilization of uncertain dynamic delay systems: Riccati equation approach. IEEE Trans. Automat. Contr., 1991, AC-36: 638—640

2 俞立. 不确定线性时滞系统的稳定化控制器设计. 控制理论与应用, 1991, 8(1): 68—73

3 Phoojaruenchanchai, S. and Furuta, K.. Memoryless stabilization of uncertain linear systems including time-varying state delays. IEEE Trans. Automat. Contr., 1992, AC-37: 1022—1026

4 俞立. 不确定动态时滞系统的稳定化鲁棒控制. 控制与决策, 1993, 8(4): 307—310

5 Mahmoud, M. S. and Al-Marhairi, N. F.. Quadratic of continuous time systems with state delay and norm-bounded time-varying uncertainties. IEEE Trans. Automat. Contr., 1994, AC-39(10): 2135—2139

6 Choi, H. H. and Chung, M. J.. Memoryless stabilization of uncertain dynamic systems with time-varying delayed states and controls. Automatica, 1995, 31(9): 1349—1351

7 Yu Li, Chu Jian and Su Hongye. Robust memoryless H_∞ controller design for linear time-delay systems with norm-bounded time-varying uncertainty. Automatica, 1996, 32(12): 1759—1762

8 褚健. 时滞离散系统控制算法及其在长形工业电阻炉中的应用. 控制理论与应用, 1995, 12(1): 70—75

9 Petersen, I. R. and Hollot, C. V.. A Riccati approach to the stabilization of uncertain linear systems. Automatica, 1986, 22: 397—411

10 Hall, J.. Theory of Functional Differential Equations, New York: Springer-Verlag, 1977

11 Khargonekar, P. P., Petersen, I. R. and Zhou, K.. Robust stabilization of uncertain linear systems: Quadratic stabilizability and H_∞ control theory. IEEE Trans. Automat. Contr., 1990, AC-35(3): 356—361

Robust Stabilization of Uncertain Systems with Delayed Input

YU Li and CHU Jian

(Institute of Industrial Control, Zhejiang University · Hangzhou, 310027, PRC)

Abstract: This paper is concerned with the robust stabilization of uncertain systems with delayed input. A condition for the stabilizability of the system by using a memoryless linear state feedback control law is derived. Based on that, a procedure for designing robust stabilizing controllers is presented.

Key words: uncertain systems; delay; robust stabilization

本文作者简介

俞 立 见本刊 1998 年第 2 期第 262 页.

褚 健 见本刊 1998 年第 2 期第 262 页.