第 15 卷第 2 期
1998 年 4 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 15, No. 2
Apr., 1998

# 一般线性滞后系统的稳定性与反馈镇定*

邓飞其　冯昭枢　刘永清

（华南理工大学自动控制工程系·广州，510641）

**摘要**：本文建立一般线性滞后微分系统的简洁稳定性定理，给出一般时不变线性系统的一种反馈镇定方法，这种方法以线性时不变系统的 LQ 反馈为特例，取得了以往文献难以达到的结果.

**关键词**：滞后系统；泛函；算子；稳定性；反馈镇定

## 1 引　言

时滞系统的反馈镇定已被许多文献讨论过. 关于控制作用不具有滞后的系统，已有大量文献进行了讨论，并取得了丰富的结果[1]. 在这些文献中，多数将滞后项视为干扰，其结果是不实用的，这样处理，其结果只有当滞后项系数充分小时才能应用，局限性大；对于控制具有滞后但状态不具有滞后的系统，可以采用完全状态空间 $(x_t, u_t)$ 上的线性变换将系统化为不具有滞后的系统，因而滞后带来的困难从理论上得到解决[2]，但这种方法不能推广到控制与状态均具有滞后的系统. 由于在许多实际系统中，系统的状态与控制作用不可避免地存在滞后，所以有必要研究状态与控制均具有滞后的系统的镇定问题. 本文通过建立一般泛函型线性滞后系统的简洁稳定性定理，研究了这一问题，得到了一般时不变线性滞后系统的反馈镇定方法，其结果具有广泛的适应面.

## 2 稳定性定理

这里先引用文[3]关于一般滞后系统的新型稳定性定理，然后对一般泛函型线性滞后系统建立全新的简单稳定性定理. 关于泛函微分方程的基本概念与记号，参考[4].

**定理 1**[3]　设 $\tau = \text{const.} > 0, C = C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n), \forall\, t \in \mathbb{R}^+, f: \mathbb{R}^+ \times C \to \mathbb{R}^n$ 将 $\{t\} \times$ ($C$ 中有界集) 映为 $\mathbb{R}^n$ 中的有界集，$f(t, 0) = 0$. 若存在算子 $D: \mathbb{R}^+ \times C \to \mathbb{R}^n$ 与 Lyapunov 函数 $V: \mathbb{R}^+ \times C \to \mathbb{R}$ 及函数 $\psi_1, \psi_2, \psi_3 \in K$ 使得 $\forall\, \varphi \in C$ 及沿 RFDE $(f)$：

$$\dot{x} = f(t, x_t) \tag{1}$$

之解 $x_t$ 有

i)　$\| D(t,\varphi) \| \geqslant \| \varphi(0) \| - a|\varphi|, \quad 0 \leqslant a < 1;$

ii)　$\psi_1(\| D(t,\varphi) \|) \leqslant V(t,\varphi) \leqslant \psi_2(|\varphi|);$

iii)　$\dot{V}(t, x_t) \leqslant -\psi_3(\| x(t) \|),$

则(1)之零解 $x = 0$ 渐近稳定.

下面考虑一般形式的线性滞后系统

$$\dot{x}(t) = \int_{-\tau}^{0} [\mathrm{d}_\theta \eta(t,\theta)] x(t+\theta), \tag{2}$$

其中 $\eta(t,\theta)$ 在 $[-\tau, 0]$ 上具有有界变差. 利用定理 1 可建立(2)的一个简单稳定性定理，文献中尚无这类结果.

在下文，对向量采用 Euclid 范数，对矩阵采用谱范数，将 $\mathrm{d}_\theta \eta(t,\theta)$ 简记为 $\mathrm{d}\eta(t,\theta)$. 令

* 国家自然科学基金(69574008)、广东省自然科学基金资助项目(970497, 940030).
本文于 1995 年 6 月 19 日收到. 1996 年 12 月 5 日收到修改稿.

$$\begin{cases} A(t)=\int_{-\tau}^{0}[\mathrm{d}\eta(t-\theta,\theta)], \\ \alpha(t)=\int_{-\tau}^{0}\int_{\theta}^{0}\|\mathrm{d}\eta(t+s-\theta,\theta)\|\mathrm{d}s, \quad \alpha=\sup_{t\in\mathbb{R}^{+}}\alpha(t), \\ \beta(t)=\int_{-\tau}^{0}\|\mathrm{d}\eta(t-\theta,\theta)\|. \end{cases} \tag{3}$$

**定理 2** 若 $\alpha<1$，且有正定常数阵 $P\in\mathbb{R}^{n\times n}$，常数 $\gamma,q>0$ 使

$$G(t)\triangleq A^{\mathrm{T}}(t)P+PA(t)+[\gamma\alpha(t)A^{\mathrm{T}}(t)A(t)+\frac{1}{\gamma}\tau\beta(t)I]\|P\|\leqslant-qI, \tag{4}$$

则(2)之零解渐近稳定.

证 定义算子 $D$ 与 Lyapunov 泛函 $V$ 如下：

$$D(t,x_t)=x(t)+\int_{-\tau}^{0}\int_{\theta}^{0}[\mathrm{d}\eta(t+s-\theta,\theta)]x_t(s)\mathrm{d}s,$$

$$V(t,x_t)=V_1+V_2,\quad V_1=D^{\mathrm{T}}PD,$$

$$V_2=\frac{1}{\gamma}\|P\|\int_{-\tau}^{0}\int_{t-\tau}^{t}\int_{s}^{t}\|x(u)\|^2\|\mathrm{d}\eta(u-\theta,\theta)\|\mathrm{d}u\mathrm{d}s.$$

则(2)可改写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}D(t,x_t)=A(t)x(t), \tag{5}$$

且 $D,V$ 满足定理 1 之条件 i)，ii). 另外有

$$\begin{aligned}\dot{V}_1&=2\dot{D}^{\mathrm{T}}PD=2x^{\mathrm{T}}(t)A^{\mathrm{T}}(t)P[x(t)+\int_{-\tau}^{0}\int_{\theta}^{0}[\mathrm{d}\eta(t+s-\theta,\theta)]x_t(s)\mathrm{d}s]\\
&=x^{\mathrm{T}}(t)[A^{\mathrm{T}}(t)P+PA(t)]x(t)\\
&\quad+\int_{-\tau}^{0}\int_{\theta}^{0}2x^{\mathrm{T}}(t)A^{\mathrm{T}}(t)P[\mathrm{d}\eta(t+s-\theta,\theta)]x_t(s)\mathrm{d}s\\
&\leqslant x^{\mathrm{T}}(t)[A^{\mathrm{T}}(t)P+PA(t)]x(t)+\int_{-\tau}^{0}\int_{\theta}^{0}[\gamma x^{\mathrm{T}}(t)A^{\mathrm{T}}(t)A(t)x(t)\\
&\quad+\frac{1}{\gamma}\|x(t+s)\|^2]\|P\|\ \|\mathrm{d}\eta(t+s-\theta,\theta)\|\mathrm{d}s\\
&\leqslant x^{\mathrm{T}}(t)[A^{\mathrm{T}}(t)P+PA(t)+\gamma\alpha(t)\|P\|A^{\mathrm{T}}(t)A(t)]x(t)\\
&\quad+\frac{1}{\gamma}\|P\|\int_{-\tau}^{0}\int_{t-\tau}^{t}\|x(u)\|^2\|\mathrm{d}\eta(u-\theta,\theta)\|\mathrm{d}u,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{V}&\leqslant x^{\mathrm{T}}(t)[A^{\mathrm{T}}(t)P+PA(t)+\gamma\alpha(t)\|P\|A^{\mathrm{T}}(t)A(t)]x(t)\\
&\quad+\frac{\|P\|}{\gamma}\tau\beta(t)\|x(t)\|^2\\
&=x^{\mathrm{T}}(t)G(t)x(t)\\
&\leqslant-q\|x(t)\|^2,\end{aligned}$$

于是 $V$ 满足定理 1 之条件 iii). 由定理 1 知，(2)之零解渐近稳定， 证毕.

再考查自治线性滞后系统

$$\dot{x}=\int_{-\tau}^{0}[\mathrm{d}\eta(\theta)]x(t+\theta), \tag{6}$$

仍采用(3)中记号，这时 $A(t)=A$(常数阵)，$\alpha(t)=\alpha,\beta(t)=\beta(\alpha,\beta=\mathrm{const.})$，且 $a\leqslant\tau\beta$. 由定理 2 有

**定理 3**　若对系统(6)，$A$ 为 Hurwitz 矩阵(稳定)，时滞 $\tau$ 使得

$$\tau\beta < 1, \quad 2\tau\beta \| A \| \, \| P \| < \lambda_{\mathrm{m}}(Q), \tag{7}$$

则(6)之零解渐近稳定，其中 $P$ 是 Lyapunov 方程

$$A^{\mathrm{T}}P + PA = -Q \tag{8}$$

之正定解，$\lambda_{\mathrm{m}}(\cdot)$ 表示最小特征值.

**注 1**　当 $A$ 稳定时，$\| A \| > 0$，在由定理 2 证明定理 3 时，取 $\gamma = 1/\| A \|$.

## 3　反馈镇定

考虑状态与控制均具有滞后的线性系统

$$\dot{x}(t) = \int_{-\tau}^{0} [\mathrm{d}\eta(\theta)] x(t+\theta) + \int_{-\tau}^{0} [\mathrm{d}\eta(\theta)] x(t+\theta), \tag{9}$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, \eta \in \mathbb{R}^{n\times n}, \mu \in \mathbb{R}^{n\times m}$；$\eta(\cdot), \mu(\cdot)$ 在 $[-\tau, 0]$ 上具有界变差.
令

$$A = \int_{-\tau}^{0} \mathrm{d}\eta(\theta), \quad B = \int_{-\tau}^{0} \mathrm{d}\mu(\theta), \tag{10}$$

设 $(A,B)$ 可控，$R \in \mathbb{R}^{m\times m}$ $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为给定的正定加权矩阵，$P$ 是 Riccati 矩阵方程

$$A^{\mathrm{T}}P + PA - PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P = -Q \tag{11}$$

之正定解矩阵，

$$\hat{A} = A - BR^{-1}B^{\mathrm{T}}P,$$

$$\hat{\beta} = \int_{-\tau}^{0} \| \mathrm{d}[\eta(\theta) - \mu(\theta)R^{-1}B^{\mathrm{T}}P] \|.$$

由定理 3 有如下

**定理 4**　若 $(A,B)$ 可控，$P$ 是(11)之正定解，时滞 $\tau$ 使得

$$\begin{aligned} H_1 &= \tau\hat{\beta} - 1 < 0, \\ H_2 &= 2\tau\hat{\beta} \| \hat{A} \| \, \| P \| - \lambda_{\mathrm{m}}(Q + PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P) < 0, \end{aligned} \tag{12}$$

则(9)由反馈 $u(t) = -R^{-1}B^{\mathrm{T}}Px(t)$ 镇定.

**注 2**　在条件(12)中，$\hat{\beta}$ 可由大于 $\hat{\beta}$ 的数替代.

**注 3**　定理 4 不但给出了很具一般性的线性滞后系统的反馈镇定方法，而且所设计的反馈律极为简单，易于实现.

## 4　设计实例

下面通过实例演示定理 4 所给出的控制器的设计方法.

设在系统(9)中，$n = 2, m = 1, \tau = 0.002$，

$$\begin{cases} \eta(\theta) = A_1\chi_{[0]}(\theta) + A_2\chi_{(-\tau,0]}(\theta), \\ \mu(\theta) = B_1\chi_{[0]}(\theta) + B_2\chi_{(-\tau,0]}(\theta), \end{cases}$$

其中 $\chi_I$ 表示集合 $I$ 的特征函数[5]，

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 0 & -4 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2.99 \end{bmatrix}.$$

经计算有

$$A = \int_{-\tau}^{0} \mathrm{d}[A_1\chi_{[0]}(\theta) + A_2\chi_{(-\tau,0]}(\theta)] = A_1 + A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},$$

$$B = \int_{-\tau}^{0} \mathrm{d}[B_1\chi_{[0]}(\theta) + B_2\chi_{(-\tau,0]}(\theta)] + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}\int_{-\tau}^{0}\mathrm{d}\theta$$

$$= B_1 + B_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 5\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

取 $R = [1], Q = 2I_{2\times 2}$,则(11)之正定解矩阵是 $P = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$,于是 $\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$,

另外

$$\eta(\theta) - \mu(\theta)R^{-1}B^{\mathrm{T}}P = D_1\chi_{[0]}(\theta) + D_2\chi_{(-\tau,0]}(\theta) - 100D_3,$$

其中

$$D_1 = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 4 & 6 \end{bmatrix},\quad D_2 = \begin{bmatrix} -10 & 0 \\ -5.98 & -9.98 \end{bmatrix},\quad D_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

于是

$$\hat{\beta} \leqslant \bar{\beta} \triangleq \int_{-\tau}^{0} \| D_1 \| \mathrm{d}\chi_{[0]}(\theta) + \int_{-\tau}^{0} \| D_2 \| \mathrm{d}\chi_{(-\tau,0]}(\theta) + \int_{-\tau}^{0} 10 \| D_3 \| \mathrm{d}\theta = 23.02438,$$

这里,$\| \cdot \|$ 为谱范数,$\| D_1 \| = 9.30074$,$\| D_2 \| = 13.21773$,$\| D_3 \| = 1.41422$.

另外

$$\| \hat{A} \| = 4.56155,\quad \| P \| = 6.82843,\quad \| Q \| = 4.$$

于是,用 $\bar{\beta}$ 代替 $\hat{\beta}$ 时,

$$H_1 = -0.95395 < 0,\quad H_2 = -9.13133 < 0,$$

条件(12)满足,由定理4得到系统的镇定控制器:

$$u(t) = -R^{-1}B^{\mathrm{T}}Px(t) = [2 \quad 2]x(t).$$

## 5 结束语

研究形如(9)的一般线性滞后系统的反馈镇定问题,需要对形如(2),(6)的一般线性滞后系统建立渐近稳定性定理.然而,在文献中没有象定理2、定理3这样具体、简洁的稳定性判据.本文通过建立(2),(6)的具体、简洁稳定性判据,得到了(9)的反馈镇定方法.本文定理1,2,3还可用于较一般系统许多问题的研究.

## 参考文献


1 刘永清,唐功友.大型动力系统的理论与应用,卷3:滞后·稳定与镇定.广州:华南理工大学出版社,1992

2 Kwon,W. H. and Pearson,A. E.. Feedback stabilization of linear systems with delayed control. IEEE Trans. on Automatic Control,1980,25(2):266—269

3 邓飞其,刘永清,冯昭枢.完全滞后系统的滞后反馈镇定.自动化学报,1996,22(5),601—605

4 Hale,J. K.. Theory of Functional Differential Equations. New York:Springer-Verlag,1977

5 Delfour,M. C. and Mauitius,A.. The structural operator F and its role in the theory of retarded systems I. Journal of Mathematical Analysis and Applications,1980,73(2):466—490

# Stability and Feedback Stabilization of General Linear Retarded Systems

DENG Feiqi, FENG Zhaoshu and LIU Yongqing

(Department of Automatic Control Engineering, South China University of Technology · Guangzhou, 510641, PRC)

**Abstract**: In this paper, a type of simple stability theorems for general linear retarded differential systems are established, and a general feedback stabilization scheme for various time-invariant linear retarded systems is developed, which includes the special case of LQ feedback stabilization of time-invariant linear systems, these results are difficult to be achieved by the methods of the previous literature.

**Key words**: retarded systems; functional; operator; stability; feedback stabilization

## 本文作者简介

**邓飞其**　1962年生.1983年毕业于湖南大学应用数学系,获理学学士学位,1997年毕业于华南理工大学自动控制工程系,获工学博士学位,1997年评为广东省十佳博士生,现为华南理工大学系统工程研究所副教授.感兴趣的研究方向是:随机系统,时滞系统的稳定,镇定与综合,发表论文100多篇,获得省部级科技奖励2项.

**冯昭枢**　1962年生.1984年、1987年毕业于中山大学数学系,分别获理学学士、硕士学位,1990年毕业于华南理工大学自动化系,获工学博士学位,博士生导师.先后在国内外学术刊物和重要会议发表论文100多篇,出版中文专著1本、英文专著2本,获得省部级奖励7项.感兴趣的研究方向是:随机系统,时滞系统的稳定,镇定与综合.

**刘永清**　见本刊1998年第1期第124页.