

二次曲线极点区域与 H_2 性能约束下不确定系统的参数摄动界 *

赵克友

(青岛大学电气与自动化工程学院·青岛, 266071)

摘要: 考虑极点囿于二次曲线所围成的区域且 H_2 性能小于某给定容限下线性不确定系统的参数最大摄动区域, 系统由状态空间模型描述且非线性依赖摄动参量. 本文将给出参量的最大摄动区间的计算公式(对单参数情况), 和最大摄动圆盘的算法(对两参数情况), 并指出极点分布鲁棒性与 H_2 性能鲁棒性在原理上的相似性.

关键词: 极点分布; H_2 性能; 鲁棒性; 非线性摄动; 状态空间模型

1 引言

线性时不变系统的许多重要特性可由其极点分布及传函矩阵的 H_2 范数(亦称 H_2 性能)来表征^[1,2]. 当系统遭受摄动时, 原先的极点分布与 H_2 性能不可避免地要发生变化. 对于参数型不确定系统, 到底能让参数摄动多大而保持极点在规定的区域内, 同时也不使 H_2 性能恶化到某容限以下? 这便是在极点分布与 H_2 性能双约束下的摄动分析问题, 此问题无论在理论上还是在应用上都是极有意义的. 本文假设系统是由状态空间模型来描述且非线性依赖于不确定的参数向量, 在同时上述两种约束下, 分别求解参数允许最大摄动区间(单参数情况)与最大摄动圆盘(两参数情况). 已有文献多数只考虑固定参数域^[3,4], 或仅在单约束下^[5], 或只涉及参数作仿射线性摄动^[3,6].

先给出本文要用到的一些数学符号. \mathbb{R} 为实数集; \mathbb{C} 为复数集; \mathbb{C}^- 为负实部复数集; cs 为矩阵的列展开运算 $\mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}^m$; $\otimes: \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{m \times m} \rightarrow \mathbb{R}^{mn \times mn}$ 为两矩阵的 Kronecker 积^[7]; 而 $\oplus: \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{m \times m} \rightarrow \mathbb{R}^{mn \times mn}$ 为两矩阵的 Kronecker 和^[7]; 一个方阵的第 k 个特征值记为 $\lambda_k(\cdot)$.

2 问题的表述

考虑依赖参数向量 $q = [q_1, q_2, \dots, q_l]' \in \mathbb{R}^l$ 的线性时不变系统

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(q)x(t) + B(q)w(t), \\ z(t) &= C(q)x(t),\end{aligned}\tag{1}$$

其中 $x(\cdot): [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $w(\cdot): [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$, 及 $z(\cdot): [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^p$ 分别是状态, 干扰和性能(误差)输出向量; $A(q)$, $B(q)$ 及 $C(q)$ 分别是有着相应维数且连续地依赖于 q 的矩阵函数. 从 $w(\cdot)$ 到 $z(\cdot)$ 的传递矩阵为 $T(s, q) \doteq C(q)(sI - A(q))^{-1}B(q)$.

定义复平面上的由二次曲线

$$(\beta + \alpha)x^2 + (\beta - \alpha)y^2 + \gamma x + \eta = 0$$

所围成的稳定性区域

$$\Omega \doteq \left\{ s \in \mathbb{C}: \frac{\alpha}{2}(s^2 + \bar{s}^2) + \beta s\bar{s} + \frac{\gamma}{2}(s + \bar{s}) + \eta < 0 \right\}. \tag{2}$$

其中 $\beta \geq 0, \gamma \geq 0, \eta \geq 0$ 且 $\alpha \leq \beta$, s 表示复数, \bar{s} 为其共轭. 容易验证, 区域 Ω 位于左半复平面 \mathbb{C}^- 中, 它包含许多重要特例: 椭圆域, 抛物线域, 圆域, 条形域, 左移左半平面等.

* 山东省自然科学基金资助及山东省重点实验室筹建经费资助项目.

本文于1996年11月4日收到, 1997年9月1日收到修改稿.

为方便,用 \mathcal{H}_a 来记全部特征值位于 Ω 中的矩阵全体,用 \mathcal{H} 来记 Hurwitz 稳定矩阵的全体. 如果对某参数 q 有 $A(q) \in \mathcal{H}_a$, 显然更有 $A(q) \in \mathcal{H}$, 此时系统(1) 的 H_2 范数定义为

$$\|T(s, q)\|_2 \doteq \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{trace}[T(j\omega, q)T^*(j\omega, q)] d\omega \right\}^{1/2}. \quad (3)$$

这里 $T^*(s, q) \doteq T'(-s, q)$, 而 $(\cdot)'$ 为转置之意.

设标称系统满足

$$\text{AS1} \quad A(0) \in \mathcal{H}_a,$$

$$\text{AS2} \quad \|T(s, 0)\|_2^2 < \gamma.$$

这里 γ 是一个事先给定且代表系统 H_2 性能(例如, 系统(1) 对单位白噪声的误差输出方差)容限的实数. 我们的目的是在参数空间 \mathbb{R}^l 中找出最大的区域, 使得对此区域中的所有 q 都有 $A(q) \in \mathcal{H}_a$ 及 $\|T(s, q)\|_2^2 < \gamma$. 下面分别考虑单参数与两参数的情况.

2.1 单参数情况

定义

$$\begin{aligned} r_p^- &\doteq \inf\{r < 0 : A(q) \in \mathcal{H}_a \quad \forall q \in (r, 0)\}, \\ r_p^+ &\doteq \sup\{r > 0 : A(q) \in \mathcal{H}_a \quad \forall q \in (0, r)\}, \\ r_2^- &\doteq \inf\{r < 0 : \|T(s, q)\|_2^2 < r \quad \forall q \in (r, 0)\}, \\ r_2^+ &\doteq \sup\{r > 0 : \|T(s, q)\|_2^2 < r \quad \forall q \in (0, r)\}, \\ r_{2p}^- &\doteq \max\{r_p^-, r_2^-\}, \quad r_{2p}^+ \doteq \min\{r_p^+, r_2^+\}. \end{aligned}$$

于是 (r_p^-, r_p^+) 是极点约束下的参数最大摄动区间, (r_2^-, r_2^+) 是 H_2 性能约束下参数量大摄动区间, (r_{2p}^-, r_{2p}^+) 是同时两种约束下的参数最大摄动区间.

问题 2.1 设系统(1)满足 AS1, AS2, 且参数化的系统矩阵可表为:

$$\text{AS3} \quad \begin{cases} A(q) \doteq A_0 + qA_1 + \cdots + q^{m_1}A_{m_1}, \\ B(q) \doteq B_0 + qB_1 + \cdots + q^{m_2}B_{m_2}, \\ C(q) \doteq C_0 + qC_1 + \cdots + q^{m_3}C_{m_3}. \end{cases}$$

这里所有的 A_k, B_k , 及 C_k 皆为给定的实常数矩阵, 求 (r_{2p}^-, r_{2p}^+) .

2.2 两参数情况

以 $U(r)$ 和 $\partial U(r)$ 来记 \mathbb{R}^2 中的圆盘 $\{q = [q_1, q_2]': \sqrt{(q_1^2 + q_2^2)} < r\}$ 及它的边界圆. 定义

$$r_p \doteq \sup\{r : A(q) \in \mathcal{H}_a \quad \forall q \in U(r)\},$$

$$r_2 \doteq \sup\{r : \|T(s, q)\|_2^2 < \gamma \quad \forall q \in U(r)\},$$

$$r_{2p} \doteq \min\{r_p, r_2\}.$$

于是 $U(r_p)$ 是极点约束下参数最大摄动圆盘, $U(r_2)$ 是 H_2 性能约束下参数最大摄动圆盘, $U(r_{2p})$ 是同时两种约束下参数最大摄动圆盘.

问题 2.2 设系统(1)满足 AS1, AS2, 且参数化的系统矩阵可表为:

$$\text{AS4} \quad \begin{cases} A(q) \doteq A_0 + q_1A_{10} + q_2A_{01} + q_1^2A_{20} + q_1q_2A_{11} + q_2^2A_{02} + \cdots + \sum_{i+j=m_1} q_1^iq_2^jA_{i,j}, \\ B(q) \doteq B_0 + q_1B_{10} + q_2B_{01} + q_1^2B_{20} + q_1q_2B_{11} + q_2^2B_{02} + \cdots + \sum_{i+j=m_2} q_1^iq_2^jB_{i,j}, \\ C(q) \doteq C_0 + q_1C_{10} + q_2C_{01} + q_1^2C_{20} + q_1q_2C_{11} + q_2^2C_{02} + \cdots + \sum_{i+j=m_3} q_1^iq_2^jC_{i,j}. \end{cases}$$

这里 A_0, B_0, C_0 及所有的 $A_{i,j}, B_{i,j}, C_{i,j}$ 皆为给定的实常数矩阵, 求 r_{2p} .

3 几个重要引理

为使开始的问题化为易于解算的形式,须借助下面三个引理,其中前两个只须运用线性代数的基本知识,并仿文[5,6]即可推得.

引理 3.1 设 $n \times n$ 矩阵 A 有特征值 $\lambda_k, k = \overline{1, n}$, 定义 nn 阶矩阵

$$T_A \doteq \frac{\alpha}{2}(A^2 \oplus A^2) + \beta(A \otimes A) + \frac{\gamma}{2}(A \oplus A) + \eta I_{nn},$$

其中 α, β, γ 与 η 意义同(2), I_{nn} 为 nn 阶单位阵, 则 T_A 的特征值为

$$\lambda_{lk} = \frac{\alpha}{2}(\lambda_l^2 + \lambda_k^2) + \beta\lambda_l\lambda_k + \frac{\gamma}{2}(\lambda_l + \lambda_k) + \eta, \quad l, k = \overline{1, n}.$$

进一步, 若 $A \in \mathcal{C}_\alpha$, 则 T_A 的特征值中不可能有为零的.

引理 3.2 设

1) Q 是 \mathbb{R}^l 中的一个单连通域, 且 $0 \in Q$,

2) $A(0) \in \mathcal{C}_\alpha$.

则对 $\forall q \in Q$ 有 $A(q) \in \mathcal{C}_\alpha$ 当且仅当对 $\forall q \in Q$ 有 $|T_A(q)| \neq 0$, 此处

$$T_A(q) \doteq \frac{\alpha}{2}(A(q)^2 \oplus A(q)^2) + \beta(A(q) \otimes A(q)) + \frac{\gamma}{2}(A(q) \oplus A(q)) + \eta I_{nn}. \quad (4)$$

特别地, 当 $\beta = \alpha = \eta = 0, \gamma = 1$ 时, $\Omega = \mathbb{C}^-$, 于是对 $\forall q \in Q$ 有 $A(q) \in \mathcal{C}$ 当且仅当对 $\forall q \in Q$ 有 $|A(q) \oplus A(q)| \neq 0$, 符号 $|\cdot|$ 表行列式运算(下同).

引理 3.3 设

1) Q 是 \mathbb{R}^l 中的一个单连通域, 且 $0 \in Q$,

2) $A(q) \in \mathcal{C} \quad \forall q \in Q$,

3) $\|T(s, 0)\|_2^2 < \gamma$.

则 $\|T(s, q)\|_2^2 < \gamma$ 对 $\forall q \in Q$ 当且仅当 $|M_\gamma(q)| \neq 0$ 对 $\forall q \in Q$, 其中

$$M_\gamma(q) \doteq A(q) \oplus A(q) + \frac{1}{\gamma} \text{cs}[B(q)B'(q)] \cdot \text{cs}[C'(q)C(q)]'. \quad (5)$$

证 系统(1)的 H_2 范数满足(见文[1,2,3])

$$\|T(s, q)\|_2^2 = \text{trace}[C'(q)C(q)L(q)] = \text{cs}[C'(q)C(q)]' \cdot \text{cs}[L(q)].$$

其中 $L(q)$ 满足

$$A(q)L(q) + L(q)A'(q) + B(q)B'(q) = 0.$$

由上式解出 $\text{cs}[L(q)]$ 并代入前式得

$$\|T(s, q)\|_2^2 = -\text{cs}[C'(q)C(q)]' \cdot (A(q) \oplus A(q))^{-1} \cdot \text{cs}[B(q)B'(q)],$$

$$\|T(s, q)\|_2^2 = \gamma \Leftrightarrow \gamma + \text{cs}[C'(q)C(q)]' (A(q) \oplus A(q))^{-1} \cdot \text{cs}[B(q)B'(q)] = 0$$

$$\Leftrightarrow |\gamma I_{nn} + \text{cs}[B(q)B'(q)] \cdot \text{cs}[C'(q)C(q)]'| \cdot (A(q) \oplus A(q))^{-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \gamma^{nn} |M_\gamma(q) \cdot (A(q) \oplus A(q))^{-1}| = 0$$

$$\Leftrightarrow |M_\gamma(q)| = 0. \quad (\text{由引理 3.2 及条件 2) 知, } |A(q) \oplus A(q)| \neq 0).$$

以上式中 I_{nn} 为 nn 阶单位阵. 引理 3.3 的必要性显然, 以下用反证法证充分性. 若存在某 $\hat{q} \in Q$ 使 $\|T(s, \hat{q})\|_2^2 \geq \gamma$, 注意由条件 3) 及 $T(s, q)$ 对 q 的连续依赖性, 则必存在某 $\tilde{q} \in Q$ 使 $\|T(s, \tilde{q})\|_2^2 = \gamma$, 此说明 $|M_\gamma(\tilde{q})| = 0$ 这与前提条件矛盾. 证毕.

4 主要结果

根据引理 3.1, 引理 3.2 及假设 AS1, 不难证明

$$\begin{aligned}r_p^- &= \sup\{q < 0 : |T_A(q)| = 0\}, \\r_p^+ &= \inf\{q > 0 : |T_A(q)| = 0\}, \\r_p &= \inf\{\|q\| = \sqrt{(q_1^2 + q_2^2)} : |T_A(q)| = 0\}.\end{aligned}$$

根据引理 3.3 及假设 AS2, 不难证明

$$\begin{aligned}r_2^- &= \sup\{q < 0 : |M_Y(q)| = 0\}, \\r_2^+ &= \inf\{q > 0 : |M_Y(q)| = 0\}, \\r_2 &= \inf\{\|q\| = \sqrt{(q_1^2 + q_2^2)} : |M_Y(q)| = 0\}.\end{aligned}$$

由上可以看出, 极点分布约束的参数摄动界与 H_2 性能约束下的参数摄动界都划归同类计算问题, 可以调用同一计算程序, 只是具体参加运算的矩阵有点不同, 因而极点分布鲁棒性与 H_2 性能鲁棒性在原理上是相似的.

4.1 单参数情况

将问题 2.1 中 $A(q)$ 的表达式代入(4)可得 $T_A(q)$ 的展开式. 不难看出它为 q 的 $2m_1$ 次方组合阵. 设展开式

$$T_A(q) = A_0 + qA_1 + \cdots + q^{2m_1}A_{2m_1}, \quad (6)$$

同样可知 $\text{cs}[B(q)B'(q)]$ 及 $\text{cs}[C'(q)C(q)]$ 分别为 q 的 $2m_2$ 及 $2m_3$ 次方组合阵, 设它们的展开式为

$$\text{cs}[B(q)B'(q)] = b_0 + qb_1 + \cdots + q^{2m_2}b_{2m_2}, \quad (7)$$

$$\text{cs}[C'(q)C(q)] = c_0 + qc_1 + \cdots + q^{2m_3}c_{2m_3}, \quad (8)$$

将(7)、(8)及 $A(q) \oplus A(q)$ 的展开式代入(5)可得 $M_Y(q)$ 的展开式, 它应是 q 的 $m = \max\{m_1, 2(m_2 + m_3)\}$ 次方组合阵. 设其展开式为

$$M_Y(q) = M_{0Y} + qM_{1Y} + \cdots + q^mM_{mY}. \quad (9)$$

问题 2.1 答案 令

$$\Lambda = - \begin{bmatrix} 0 & -I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -I \\ A_0^{-1}A_{2m_1} & A_0^{-1}A_{2m_1-1} & A_0^{-1}A_{2m_1-2} & \cdots & A_0^{-1}A_1 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$$\Gamma = - \begin{bmatrix} 0 & -I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -I \\ M_{0Y}^{-1}M_{mY} & M_{0Y}^{-1}M_{(m-1)Y} & M_{0Y}^{-1}M_{(m-2)Y} & \cdots & M_{0Y}^{-1}M_{1Y} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

计算 $\lambda_{\min}^-(\Lambda), \lambda_{\max}^+(\Lambda), \lambda_{\min}^-(\Gamma)$ 及 $\lambda_{\max}^+(\Gamma)$, 其中 $\lambda_{\min}^-(\cdot)$ 代表一个矩阵的最小负实特征值(若无负实特征值时, 令 $\lambda_{\min}^-(\cdot) = 0^-$), $\lambda_{\max}^+(\cdot)$ 代表一个矩阵的最大正实特征值(若无正实特征值时, 令 $\lambda_{\max}^+(\cdot) = 0^+$). 则

$$r_{2p}^- = \max\{r_p^-, r_2^-\}, \quad r_{2p}^+ = \min\{r_p^+, r_2^+\}, \quad (12)$$

其中

$$r_p^- = \frac{1}{\lambda_{\min}^-(\Lambda)}, \quad r_p^+ = \frac{1}{\lambda_{\max}^+(\Lambda)}, \quad (13)$$

$$r_2^- = \frac{1}{\lambda_{\min}^-(\Gamma)}, \quad r_2^+ = \frac{1}{\lambda_{\max}^+(\Gamma)}. \quad (14)$$

证 由本节开始部分所得到的 r_p^-, r_p^+ , 及 r_2^-, r_2^+ 的表达式, 运用文[5]对 q 的 m 方组合阵的处理方法即可推得(13)、(14). 证毕.

4.2 两参数情况

为了解决问题 2.2, 引入极座标 $q_1 = r\cos\theta, q_2 = r\sin\theta$, 于是

$$A(q) = A(r, \theta) = A_0 + rA_1(\theta) + \cdots + r^{m_1}A_{m_1}(\theta),$$

$$B(q) = B(r, \theta) = B_0 + rB_1(\theta) + \cdots + r^{m_2}B_{m_2}(\theta),$$

$$C(q) = C(r, \theta) = C_0 + rC_1(\theta) + \cdots + r^{m_3}C_{m_3}(\theta),$$

其中

$$A_k(\theta) \doteq \sum_{i+j=k} r^k (\cos\theta)^i (\sin\theta)^j A_{ij}, \quad k = 1, \dots, m_1,$$

$$B_k(\theta) \doteq \sum_{i+j=k} r^k (\cos\theta)^i (\sin\theta)^j B_{ij}, \quad k = 1, \dots, m_2,$$

$$C_k(\theta) \doteq \sum_{i+j=k} r^k (\cos\theta)^i (\sin\theta)^j C_{ij}, \quad k = 1, \dots, m_3.$$

显然对一个固定的 θ 问题 2.2 完全化为问题 2.1, 问题 2.2 的最终解只不过增加对区间 $[0, 2\pi]$ 的网格化处理, 即最终解须迭代求得.

问题 2.2 答案(算法)

第 1 步 将 $[0, 2\pi]$ 分成 t 份, 即令 $\theta_j = 2j\pi/t, j = 0, 1, \dots, t$;

第 2 步 算出诸 $A_k(\theta_j), B_k(\theta_j)$ 及 $C_k(\theta_j)$;

第 3 步 算出诸 $A_k(\theta_j), b_k(\theta_j), c_k(\theta_j)$ 及 $M_{kj}(\theta_j)$;

第 4 步 重复地调用问题 2.1 的算法公式, 得 $r_{2pj}^+, j = 0, 1, \dots, t$;

第 5 步 $r_{2p} = \min\{r_{2pj}^+, j = 0, 1, \dots, t\}$, 停止.

5 结语

本文给出由状态空间模型描述, 且非线性依赖实未知参数的不确定线性系统, 在极点区域(由二次曲线所围成)与 H_2 性能约束下, 参数最大允许摄动区间(单参数情况)与最大允许摄动圆盘(两参数情况). 因为充分用到了系统的结构信息, 所得结果不含任何保守性. 本文方法原则上可以推广到多约束下或多摄动参量的情况, 不过推导与计算上要复杂得多. 另外, 对于离散时间系统的有关问题也是很有意义的, 有关结果将另文发表.

※

参 考 文 献

- 1 Doyle, J. C., Francis, B. A. and Tannenbaum, A. R. . Feedback Control Theory. New York: Macmillan Publishing Company, 1991
- 2 Mustafa, D. and Glover, K.. Minimum Entropy H_∞ Control. Lecture Notes in Control and information Sciences, New York: Springer-Verlag, 1990
- 3 Friedman, J. H. , Kabamba, P. T. and Khargonekar, P. P.. Worst-case and average H_2 performance analysis against real constant parametric uncertainty, Automatica, 1995, 31(4):649—657
- 4 Zhou, K. , Khargonekar, P. P. , Stoustrup, J. and Niemann, H. H. . Robust performance of systems with structured uncertainties in state space , Automatica, 1995, 31(2):244—255
- 5 赵克友. 具有左移左扇区稳定的矩阵与多项式的最大非线性摄动边界, 自动化学报, 1995, 21(2):227—231
- 6 Fu, M. and Barmish, B. R. . Maximal unidirectional perturbation bounds for stability of polynomials and matrices. Systems and Control Letters, 1988, 11:173—179

7 Brewer, J. W.. Kronecker products and matrix calculus in system theory. IEEE Trans. Circuits Syst., 1978, 25(9):772—781

Parametric Perturbation Bounds for Uncertain Systems with Quadric-Curve Pole Location and H_2 Performance Constraints

ZHAO Keyou

(College of Electrical and Automation Engineering, Qingdao University, Qingdao, 266071, PRC)

Abstract: Consider the maximal perturbation region for linear continuous-time uncertain systems with quadric-curve pole location and H_2 performance constraints; the systems are described by state space models which depend nonlinearly on some perturbation parameters. This paper will give formulas for calculating the maximal parametric perturbation interval (in single parameter cases) and algorithm for calculating the maximal parametric perturbation disk (in two parameter cases), and also corroborate, in principle, the similarity between pole location and H_2 performance robustness.

Key words: pole location; H_2 performance; robustness; nonlinear perturbation; state space models

本文作者简介

赵克友 1945年生。1968年毕业于山东大学,早年从事电气技术工作,后任教于山东大学,现为青岛大学电气与自动化工程学院教授。长期从事控制理论及应用方面的教学研究,当前主要研究兴趣为鲁棒控制, H_∞ 控制及智能控制。

首届全国“技术过程的故障诊断与安全性”学术会议 (中国 SAFEPROCESS'99) 征文通知

“技术过程的故障诊断与安全性”近 20 多年来已发展成为热点研究方向之一,理论与应用成果大量涌现。为推动我国这一领域研究工作的开展,并与国际自控联的相应机构接轨,中国自动化学会已于 1997 年 10 月批准成立“技术过程的故障诊断与安全性”专业委员会。首届学术会议拟定于 1999 年 5 月在北京清华大学举行。

一、征文范围

石油化工、电力、冶金、航空航天、电子、机械等行业中,涉及故障检测、故障诊断、可靠性、安全控制、监测控制、容错控制等方面的新理论、新方法、新技术和新的应用成果。

二、征文要求

1. 全文不超过 7000 字;2. A4 单页小 4 号字激光打印(四周各留 2.5 厘米);3. 按《自动化学报》的论文格式排版;4. 一式两份(不管录用与否一律不退稿)。

三、征文截稿日期:1998 年 12 月 31 日。

四、录用通知发出日期:1999 年 1 月 31 日。

五、来稿请寄:北京 100084, 清华大学自动化系 周东华教授收

主办单位:中国自动化学会技术过程的故障诊断
与安全性专业委员会
清华大学自动化系