第 15 卷第 4 期
1998 年 8 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 15, No. 4
Aug., 1998

病态对象的鲁棒性能设计*

杨志勇　王广雄
(哈尔滨工业大学控制工程系·哈尔滨,150001)

摘要：病态对象因为其高条件数的特点为系统的鲁棒性能设计带来困难，μ综合中 M 阵具有四块结构，适于求解这类病态问题，而且结构奇异值 μ 是鲁棒性能的充要判据. 本文给出 D-K 迭代中初值 D_0 阵的选取方法，可以较快地求得 μ 综合解，文中还以精馏塔鲁棒控制设计为例进行了说明.

关键词：鲁棒性能；病态对象；条件数；D-K 迭代

1　病态问题

病态对象具有较高的条件数 $\gamma(G)$[1]，当其存在不确定性时，这个高条件数可能会使系统的鲁棒性能变差，甚至会带来不稳定，因此病态问题是鲁棒设计的一个难题. 由于 MIMO 系统都存在有或大或小的条件数，所以病态问题的解决也有一定的普遍意义.

对于病态对象的鲁棒性能设计，必须使控制器具有较低的条件数[1]，即系统设计的结果应保证系统开环最大奇异值 $\bar{\sigma}(GK)$ 和最小奇异值 $\underline{\sigma}(GK)$ 之间有一定的距离. 具体来说，设 $\bar{\sigma}(GK)$ 过 0dB 处的频率是 $\bar{\omega}_c$，$\underline{\sigma}(GK)$ 过 0dB 处的频率是 $\underline{\omega}_c$，要保证鲁棒性能，就要求 $\bar{\omega}_c$ 和 $\underline{\omega}_c$ 有相当的距离，所以病态对象的鲁棒控制不能用混合灵敏度(S/T)问题来解决，因为混合灵敏度设计的最终结果将导致 $\bar{\omega}_c \approx \underline{\omega}_c$.

由于要求 $\bar{\omega}_c > \underline{\omega}_c$，尽管原则上可以用回路成形法来进行鲁棒设计，但究竟 $\bar{\omega}_c$ 和 $\underline{\omega}_c$ 之间应该差多少，必须经过设计试凑才能确定. 对比来说，μ 综合法则是一种综合法，系统的各特征数据会根据鲁棒性能的要求自行得到满足.

2　μ 综合方法

定理[2]　对于如图 1(a)所示的具有对角块不确定性 Δ 的广义对象 M，确保 $F_u(M,\Delta)$ 稳定和性能要求 $\|F_u(M,\Delta)\|_\infty \leqslant 1$ 的充要条件是 $\|\mu(M)\|_\infty \leqslant 1$，其中 $\forall\ \Delta \in B\Delta$.

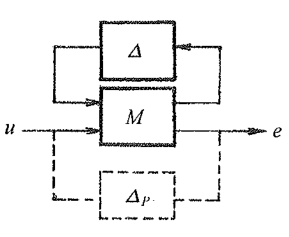

图 1(a)　u综合设计示意图

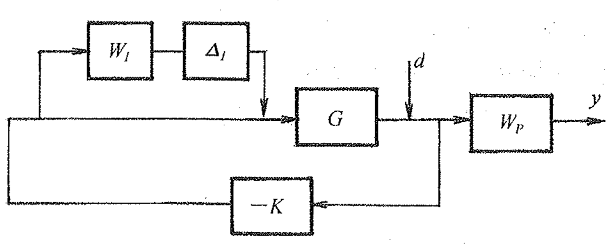

图 1(b)　具有输入不确定性系统μ综合设计框图

具有输入不确定性设计的框图如图 1(b)所示，化成图 1(a)的 μ 综合标准形式得到，

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_P S & W_P SG \\ -W_I KS & -W_I KSG \end{bmatrix}. \tag{1}$$

其中 S 为输出灵敏度，T_I 为输入补灵敏度，W_P，W_I 分别是系统设计的鲁棒性能权和鲁棒稳定

* 国家高等学校博士学科点专向基金资助项目(96021314).
本文于 1996 年 3 月 15 日收到. 1997 年 3 月 4 日收到修改稿.

性权. M 阵中 M_{11} 块对应于系统的性能要求,M_{22} 块对应于系统的鲁棒稳定性要求. 系统结构奇异值 $\mu(M) \leqslant 1$ 是系统鲁棒性能设计的充要条件. D-K 迭代 μ 综合采用 μ 值上界求法[2],

$$\mu(M) = \inf_{D}\left\{\bar{\sigma}\left(D\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}D^{-1}\right)\right\} \leqslant 1. \tag{2}$$

其中 D 称为尺度阵. μ 综合设计是四块问题,不同于混合灵敏度的两块问题,其利用 D 的作用,使 $\bar{\sigma}(GK)$ 与 $\underline{\sigma}(GK)$ 自然分开,得到条件数较小的控制器,保证系统设计的鲁棒性能.

3 D-K 迭代中初始 D_0 阵的选取

D-K 迭代是 μ 综合的核心,是指通过 D,K 的交替寻优,求得使系统 μ 值最小的控制器的过程. 从计算过程来看 D-K 迭代是在给定初始 D_0 下的逐次逼近过程,故选取一个合适的初始 D_0 阵,有利于减少整个过程的计算量,提高设计效率.

公式(3) 中尺度阵 D 是根据系统摄动情况选取的对角阵,这里讨论不确定块为满块时的鲁棒性能设计问题,因此系统尺度阵可以写成下面的形式,其中 $d(\omega)$ 是标量,这样尺度阵 $D(\omega)$ 的选取问题归结为标量 $d(\omega)$的选取问题[3].

$$D(\omega) = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & d(\omega)I_2 \end{bmatrix}, \tag{3}$$

由式(3)经过推导可以近似得到

在低频 ($\omega < \underline{\omega}_c$) 段, $$\underline{\sigma}(G) \leqslant d \leqslant \frac{1}{|W_I|}\underline{\sigma}(G). \tag{4}$$

在高频($\omega > \bar{\omega}_c$) 段, $$|W_P|\bar{\sigma}(G) \leqslant d \leqslant \bar{\sigma}(G). \tag{5}$$

因此 $d(\omega)$ 在低频和高频的大致形状可以通过式(4) 和式(5) 与对象和设计时的权函数联系起来. 尽管这两个公式在推导中存在有一定的近似,但可以基本说明 $d(\omega)$ 的选择在低频时贴近对象的最小奇异值,在高频时贴近对象的最大奇异值,这对 $d(\omega)$ 初始值的选择是很有帮助的. 设计时可以取公式(4)、(5) 界函数的均值作为初值 $d_0(\omega)$:

在低频($\omega < \underline{\omega}_c$) 段,取 $$d_0(\omega) = \frac{1 + 1/|W_I|}{2}\underline{\sigma}(G), \tag{6}$$

在高频($\omega > \bar{\omega}_c$) 段,取 $$d_0(\omega) = \frac{1 + |W_p|}{2}\bar{\sigma}(G). \tag{7}$$

根据上述法则确定的初始尺度阵 $D_0(\omega)$ 可以使 D-K 迭代很快收敛到最优解,使 μ 综合法成为一种系统性的方法.

4 精馏塔的鲁棒控制举例[1]

考虑条件数为 141.7 的精馏塔传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{75s + 1}\begin{bmatrix} 0.878 & -0.864 \\ 1.082 & -1.096 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

取系统设计的鲁棒性能权 W_p 和鲁棒稳定性权函数 W_I 为:

$$W_p = 0.5\,\frac{10s + \rho}{10s}, \quad W_I = 0.2\,\frac{5s + 1}{0.5s + 1}. \tag{9}$$

其中 ρ 用于调整设计权函数,保证 μ 综合设计达到最优.

根据公式(6)、(7),取初始 $d_0(s) = 1.89 \times 10^{-5}\,\dfrac{(s + 0.17)^2(s + 1000)}{(s + 0.013)(s + 1)^2}$. 图 3 表示了 $d_0(\omega)$,$\dfrac{1 + 1/|W_I|}{2}\underline{\sigma}(G)$ 和$\dfrac{1 + |W_p|}{2}\bar{\sigma}(G)$ 的关系,经过 4 次 D-K 迭代便可以得到如图 4 所示的 μ 综合最优设计对应的 $d(\omega)$. 从图 4 中可以看出最优设计时的 $d(\omega)$ 与公式(6)、(7)估计

的初值是接近的，可见这种选择初始 D_0 阵的方法是可靠的.

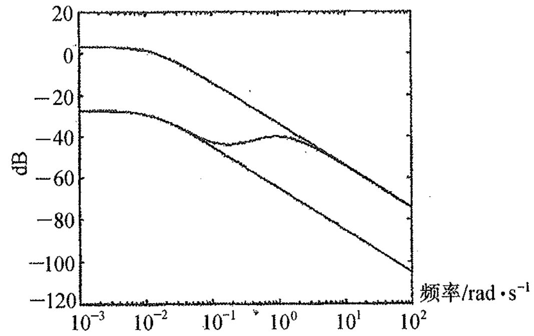

图 3　初始 $d_0(\omega)$与界函数

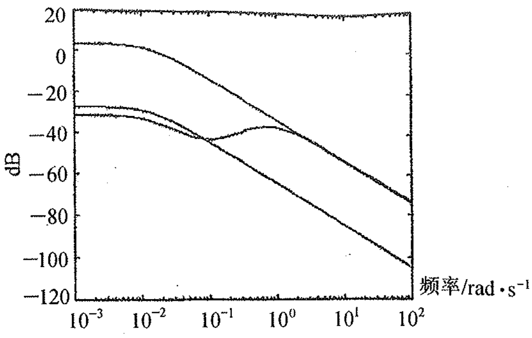

图 4　最优设计时的$d(\omega)$与界函数

图 5 是 μ 综合最优设计时对应式(2)M 阵的各相应块的最大奇异值 Bode 图，可见 μ 综合的结果使 $\bar{\sigma}(M_{11})\approx 1$ 和 $\bar{\sigma}(M_{22})\approx 1$ 的频段分开，即使 $\overline{\omega}_c$ 和 $\underline{\omega}_c$ 有一定的距离，自然产生了条件数较小的控制器.

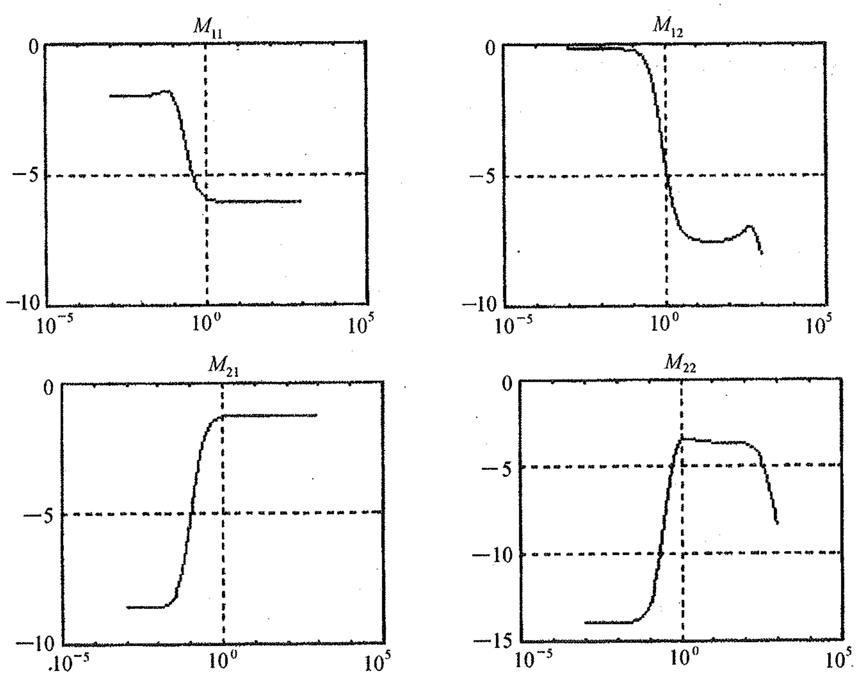

图 5　μ 综合设计 M 阵的四块图

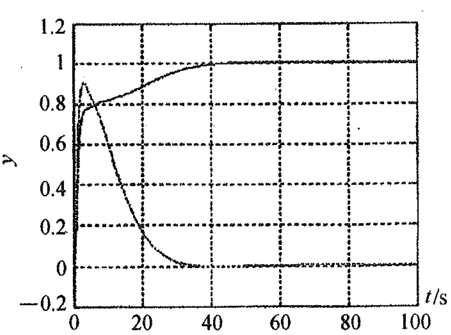

图 6　对象摄动时的阶跃响应曲线

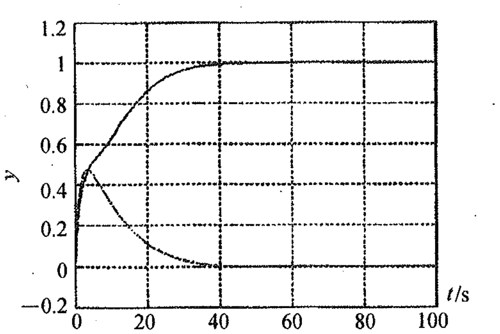

图 7　名义对象的阶跃响应曲线

文[1]中指出，当输出端扰动为$[1\quad 0]^T$方向时系统摄动后的性能接近最差情况，图6和图7是本例对应这种情况在摄动对象和名义对象下的阶跃响应，两者的响应特性相差不大，可见系统具有良好的鲁棒性能.

5 结论

$\mu\leqslant 1$是处理系统鲁棒性能设计的充要条件，利用μ综合方法可以圆满地解决病态对象的鲁棒性能设计问题. D-K迭代中，可以通过选取合适的初始值D_0，使D-K迭代很快收敛到最优解，使μ综合设计成为一种系统性的方法.

参考文献

1 Skogestad, S., Morari, Doyle, J. C.. Robust control of ill-conditioned plants: High-purity distillation. IEEE Trans. Automat. Contr., 1988, AC-32(12): 1092—1105

2 Doyle, J. C.. A review of μ. Proc. 10th IFAC World Congress, Munich, 1987, 395—402

3 Doyle, J. C.. Analysis of feedback systems with structured uncertainties. IEE Proc. 1982, 129(6): 242—249

Robust Performance Design of Ill-Conditioned Plant

YANG Zhiyong and WANG Guangxiong

(Department of Automatic Control, Harbin Institute of Technology · Harbin, 150006, PRC)

Abstract: It is difficult for the robust performance design of ill-conditioned plant because of its high condition number. With the four-block matrix M, μ-synthesis could deal with the design of ill-conditioned plant and μ is necessary and sufficient condition for robust performance. In this paper a way to get an appropriate initial matrix D_0 in D-K iterations is presented, with the robust performance design of high-purity distillation as an example.

Key words: robust performance; ill-conditioned plant; condition number; D-K iterations

本文作者简介

杨志勇 见本刊1998年第1期第117页.

王广雄 见本刊1998年第1期第117页.