第15卷第4期
1998年8月
控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS
Vol. 15, No. 4
Aug., 1998

不确定离散系统的D稳定鲁棒容错控制

孙金生　李　军　王执铨
(南京理工大学自动控制系·南京,210094)

摘要：本文基于Lyapunov稳定性理论和线性变换技术,研究了离散系统的D稳定容错控制问题,给出了对传感器失效具有完整性的D稳定系统需满足的一个充分条件,进而讨论了不确定离散系统的D稳定鲁棒容错控制问题,并把结果推广到执行器失效的情况,给出了D稳定鲁棒容错控制系统的设计方法.最后用设计实例及仿真结果验证了这种方法的有效性.

关键词：容错控制；D稳定；离散系统；鲁棒性；完整性

1　引　言

无论是经典控制理论还是现代控制理论,都是在假设对象数学模型精确已知,传感器和执行器都正常工作的条件下进行分析和设计的,但对一个实际对象而言,由于建模误差、线性化近似及环境的变化等因素,所得到的只是系统的一个近似模型,而传感器和执行器等部件也不可避免地会发生故障.因此,根据标称对象模型设计的控制系统,由于参数不确定性和部件失效等原因,常常会失去所期望的动、静态特性,甚至会失去稳定性.故设计系统时必须考虑参数不确定性和部件失效因素对系统性能的影响,使系统具有鲁棒性和容错性.

近年来,随着对系统可靠性要求的提高,容错控制的研究得到了广泛的重视,在可靠镇定[1]、系统重构[2]和完整性设计[3,4]等几方面取得了很多成果.所谓完整性是指当系统中某些传感器或执行器失效时,系统仍能保持渐近稳定的特性.这方面的研究成果很多,但到目前为止,几乎所有的研究都只是保证系统在传感器或执行器失效时仍是稳定的,但不保证系统的性能.而对一个实际可用的系统来说,性能也是至关重要的,性能恶化严重的系统是没有实用价值的.

D稳定理论是近年来控制理论研究十分活跃的分支之一,有许多新的成果问世,但这些研究中都没有考虑传感器和执行器可能失效的情况,当有传感器或执行器失效时,按其方法设计的系统的性能和稳定性就得不到保证.

本文针对离散性多变量系统,考虑了传感器失效后有一定性能保证的D稳定容错控制问题.

2　问题的描述

考虑离散性多变量系统

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k). \tag{1}$$

其中$x(k) \in \mathbb{R}^n$为状态变量,$u(k) \in \mathbb{R}^m$为控制变量,A,B为适维矩阵.假定(A,B)可控,若采用状态反馈控制

$$u(k) = Gx(k). \tag{2}$$

其中K为状态反馈增益阵.则闭环系统为

$$x(k+1) = (A+BG)x(k) := A_c x(k). \tag{3}$$

考虑到传感器的可能失效,引入开关阵F,并把它放在状态反馈增益阵K和状态$x(k)$之

本文于1995年1月26日收到.1997年10月13日收到修改稿.

间，其形式为

$$F = \mathrm{diag}(f_1, f_2, \cdots, f_n). \tag{4}$$

其中

$$f_i = \begin{cases} 1, & \text{第 } i \text{ 个传感器正常}, \\ 0, & \text{第 } i \text{ 个传感器失效}, \end{cases} \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

则实际的故障闭环系统为

$$x(k+1) = [A_c + BG(F - I)]x(k). \tag{5}$$

定义(D 稳定定义)　若闭环系统的极点都位于圆形区域 $D(\alpha, r)$ 内，则称系统是 D 稳定的. 其中 $r > 0, |\alpha| + r < 1$.

对传感器失效具有完整性的 D 稳定容错控制系统设计问题可描述如下：如何寻求状态反馈控制增益阵 K，使对任意传感器失效 $F \in \Omega$ 闭环故障系统(5) 都是 D 稳定的，即对任意 $F \in \Omega$ 闭环故障系统(5) 的极点仍都位于指定的圆形区域 $D(\alpha, r)$ 内. 其中 Ω 为传感器开关阵 F 对角元素任取 0 和 1 的各种组合的对角阵集合(除 $F = 0$ 外).

3　主要结果

引理 1　当且仅当对任意对称正定阵 Q，存在唯一对称正定解 P 满足

$$A_c^{\mathrm{T}} P A_c - P = -Q \tag{6}$$

时，离散多变量系统

$$x(k+1) = A_c x(k) \tag{7}$$

渐近稳定.

由引理 1 可以很容易推出下面的结果：

引理 2　当且仅当对任给的对称正定阵 Q，存在唯一对称正定阵 P 满足方程

$$\left(\frac{A_c - \alpha I}{r}\right)^{\mathrm{T}} P \left(\frac{A_c - \alpha I}{r}\right) - P = -\frac{Q}{r^2} \tag{8}$$

时，离散系统(7)是 D 稳定的，即系统的极点都位于 $D(\alpha, r)$ 内. 其中 $r > 0, |\alpha| + r < 1$.

引理 3[5]　采用线性变换

$$\hat{x}(k) = r^{-k} \sum_{m=0}^{k} \mathrm{C}_k^m (-\alpha)^{k-m} x(m). \tag{9}$$

其中 $\mathrm{C}_k^m = k!/(k-m)!m!$，则系统

$$x(k+1) = (A + \Delta A)x(k) \tag{10}$$

经变换后为

$$\hat{x}(k+1) = (\hat{A} + \Delta\hat{A})\hat{x}(k). \tag{11}$$

其中

$$\hat{A} = \frac{A - \alpha I}{r}, \quad \Delta\hat{A} = r^{-1}\Delta A. \tag{12}$$

显然，若系统(11)是稳定的，则系统(10)的极点位于圆形区域 $D(\alpha, r)$ 内(即 D 稳定).

定理 1　若闭环系统(3)是 D 稳定的，且满足条件

$$2\beta \| P \| \, \| A_c - \alpha I \| + \beta^2 \| P \| < \lambda_m(Q). \tag{13}$$

其中 $\| \cdot \|$ 为矩阵的谱范数，$\lambda_m(\cdot)$ 为求最小特征值运算，P 为对应正定阵 Q 方程(8)的解，而

$$\beta = \max_{F \in \Omega}(\| BG(I - F) \|). \tag{14}$$

则有传感器失效时的闭环系统仍是 D 稳定的.

证　因闭环系统(3)是 D 稳定的，那么对一个给定的正定阵 Q，必存在一个正定阵 P 满足

(8)式. 考虑传感器失效后的闭环系统为

$$x(k+1)=(A_c+\delta A)x(k). \tag{15}$$

其中 $\delta A=BG(F-I)$. 则采用线性变换(9)后，系统可描述为

$$\hat{x}(k+1)=(\hat{A}+\delta\hat{A})\hat{x}(k). \tag{16}$$

其中

$$\hat{A}_c=\frac{A_c-\alpha I}{r},\quad \delta\hat{A}=r^{-1}\delta A. \tag{17}$$

取系统的 Lyapunov 函数为

$$V(k)=\hat{x}^{\mathrm{T}}(k)P\hat{x}(k). \tag{18}$$

其中 P 为给定 Q 后(8)式的正定解. 则

$$\begin{aligned}
\Delta V(k)&=V(k+1)-V(k)\\
&=\hat{x}^{\mathrm{T}}(k+1)P\hat{x}(k+1)-\hat{x}^{\mathrm{T}}(k)P\hat{x}(k)\\
&=\hat{x}^{\mathrm{T}}(k)(\hat{A}_c+\delta\hat{A})^{\mathrm{T}}P(\hat{A}_c+\delta\hat{A})\hat{x}(k)-\hat{x}^{\mathrm{T}}(k)P\hat{x}(k)\\
&=\hat{x}^{\mathrm{T}}(k)(\hat{A}_c^{\mathrm{T}}P\hat{A}_c+\hat{A}_c^{\mathrm{T}}P\delta\hat{A}+\delta\hat{A}^{\mathrm{T}}P\hat{A}_c+\delta\hat{A}^{\mathrm{T}}P\delta\hat{A}-P)\hat{x}(k)\\
&=\hat{x}^{\mathrm{T}}(k)(-r^{-2}Q+2\hat{A}_c^{\mathrm{T}}P\delta\hat{A}+\delta\hat{A}^{\mathrm{T}}P\delta\hat{A})\hat{x}(k)\\
&\leqslant -r^{-2}\lambda_m(Q)\|\hat{x}(k)\|^2+(\|2\hat{A}_c^{\mathrm{T}}P\delta\hat{A}+\delta\hat{A}^{\mathrm{T}}P\delta\hat{A}\|)\|\hat{x}(k)\|^2\\
&\leqslant -r^{-2}\lambda_m(Q)\|\hat{x}(k)\|^2+(\|2\hat{A}_c^{\mathrm{T}}\|\,\|P\|\,\|\delta\hat{A}\|+\|P\|\,\|\delta\hat{A}\|^2)\|\hat{x}(k)\|^2\\
&\leqslant -r^{-2}\lambda_m(Q)\|\hat{x}(k)\|^2+\left(2\left\|\frac{A_c-\alpha I}{r}\right\|\|P\|\left\|\frac{\delta A}{r}\right\|+\|P\|\left\|\frac{\delta A}{r}\right\|^2\right)\|\hat{x}(k)\|^2\\
&\leqslant -r^{-2}[\lambda_m(Q)-(2\|A_c-\alpha I\|\,\|P\|\beta+\|P\|\beta^2)]\|\hat{x}(k)\|^2,
\end{aligned}$$

若有

$$2\beta\|P\|\,\|A_c-\alpha I\|+\beta^2\|P\|<\lambda_m(Q),$$

则有

$$\Delta V(k)\leqslant 0.$$

根据 Lyapunov 稳定性理论可知，有传感器失效时变换后的闭环系统(16)仍是渐近稳定的，故系统(15)是 D 稳定的.

在实际系统中，由于建模误差、元件非线性、环境变化等因素的影响，系统的不确性是不可避免的，而不确定性会破坏系统的动、静态性能及稳定性. 因此，设计控制系统时，必须考虑不确定性对系统性能的影响，使系统具有参数鲁棒性.

考虑不确定离散线性多变量系统

$$x(k+1)=[A+\Delta A(\sigma(k))]x(k)+[B+\Delta B(\sigma(k))]u(k). \tag{19}$$

其中 $x(k)$ 为 n 维状态变量，$u(t)$ 为 m 维控制变量，$\sigma(k)$ 为 p 维不确定参数向量，$A,\Delta A,B,\Delta B$ 为维数适当的矩阵，$\Delta A(\cdot),\Delta B(\cdot)$ 为连续函数，且 (A,B) 可控. 若仍采用状态反馈控制(2)，则考虑传感器失效后的闭环系统为

$$x(k+1)=(A_c+\delta A_c)x(k). \tag{20}$$

其中

$$A_c=A+BG, \tag{21}$$

$$\delta A_c=\Delta A(\sigma(k))+\Delta B(\sigma(k))GF+BG(F-I). \tag{22}$$

定理 2 若不确定离散线性多变量系统的参数不确定性满足

$$\|\Delta A(\sigma(k))\|\leqslant a,\quad \|\Delta B(\sigma(k))\|\leqslant b, \tag{23}$$

标称系统(3)D 稳定，则当满足条件

$$2(\beta+a+b\|G\|)\|A_c-\alpha I\|\,\|P\|+(\beta+a+b\|G\|)^2\|P\|<\lambda_m(Q) \tag{24}$$

时，有传感器失效的不确定系统(20)仍是 D 稳定的.

根据文献[6]，可按如下方法设计系统使其闭环极点位于圆形区域 $D(\alpha,r)$ 内.

引理 4　对完全可控的离散系统

$$x(k+1)=Ax(k)+Bu(k). \tag{25}$$

状态反馈控制

$$u(k)=Gx(k)=-[R+\overline{B}^{\mathrm{T}}S\overline{B}]^{-1}\overline{B}^{\mathrm{T}}S\overline{A}x(k) \tag{26}$$

可使系统的闭环极点位于圆形区域 $D(\alpha,r)$ 内. 其中

$$\overline{A}=\frac{A-\alpha I}{r},\quad \overline{B}=r^{-1}B. \tag{27}$$

S 为离散 Riccati 方程

$$S=\overline{A}^{\mathrm{T}}S\overline{A}-\overline{A}^{\mathrm{T}}S\overline{B}[R+\overline{B}^{\mathrm{T}}S\overline{B}]^{-1}\overline{B}^{\mathrm{T}}S\overline{A}+Q_1 \tag{28}$$

的对称正定解. 式中 $Q_1>0,R>0$.

由此，对一个可控的不确定离散系统(19)，可按如下方法设计对传感器失效具有完整性的 D 稳定鲁棒容错控制器.

1) 确定参数不确定性的范数界. 即求 a,b，使满足

$$\|\Delta A(\sigma(k))\|\leqslant a,\quad \|\Delta B(\sigma(k))\|\leqslant b. \tag{29}$$

2) 根据对系统的性能要求，取适当的圆形区域 $D(\alpha,r)$.

3) 选取适当的 Q_1,R，解离散 Riccati 方程(28) 求出 S，得到控制律(26).

4) 取 $Q>0$，解方程(8) 求得 P，验证条件(24)式是否成立，若不成立，则按

$$Q_1^{i+1}=Q_1^i\left(1+\varepsilon\frac{d_i-d_{i-1}}{\|Q_1^i\|-\|Q_1^{i-1}\|}\right) \tag{30}$$

修正 Q_1，其中 $\varepsilon>0$，而

$$d=\lambda_m(Q)-(2(\beta+a+b\|G\|)\|A_c-\alpha I\|\|P\|+(\beta+a+b\|G\|)^2\|P\|). \tag{31}$$

然后转回 3)重新计算，直至条件(24)满足为止，则最终所得的就是系统对传感器失效具有完整性的 D 稳定鲁棒容错控制器.

注　由于文中给出的是充分条件，有一定的保守性，不是所有的系统都能求得满足条件的鲁棒容错控制器.

在系统中，除传感器外，执行器也是故障的主要来源之一，因此，有必要讨论执行器失效下的 D 稳定容错控制问题.

为了表示执行器的可能失效，引入开关阵 L，并将其放在 B 阵和反馈阵 K 之间，其形式为

$$L=\mathrm{diag}(l_1,l_2,\cdots,l_m). \tag{32}$$

其中

$$l_i=\begin{cases}1, & \text{第 } i \text{ 个执行器正常},\\ 0, & \text{第 } i \text{ 个执行器失效},\end{cases}\quad i=1,2,\cdots,m. \tag{33}$$

则考虑执行器失效后的闭环系统为

$$x(k+1)=(A_c+\delta A)x(k). \tag{34}$$

其中 $\delta A=B(L-I)G$，则可得如下结论：

定理 3　若闭环系统(3)是 D 稳定的，则当满足条件

$$2\eta\|P\|\|A_c-\alpha I\|+\eta^2\|P\|<\lambda_m(Q) \tag{35}$$

时，有执行器失效时的闭环系统(34)仍是 D 稳定的. 其中 P 为对应正定阵 Q(8) 式的正定解，而

$$\eta = \max_{L \in \Psi}(\| B(L-I)G \|). \tag{36}$$

式中 Ψ 为开关阵 L 对角元素任取 0 和 1 各种组合的对角阵集合(除 $L=0$ 外).

考虑参数不确定性时执行器失效闭环系统可描述为

$$x(k+1) = (A_c + \delta A_c)x(k). \tag{37}$$

其中 A_c 定义同前，而

$$\delta A_c = \Delta A(\sigma(k)) + \Delta B(\sigma(k))LG + B(L-I)G. \tag{38}$$

定理 4 若标称系统(3)D稳定,参数不确定性满足

$$\| \Delta A(\sigma(k)) \| \leqslant a, \quad \| \Delta B(\sigma(k)) \| \leqslant b. \tag{39}$$

则当满足条件

$$2(\eta + a + b\| G \|)\| A_c - \alpha I \| \; \| P \| + (\eta + a + b \| G \|)^2 \| P \| < \lambda_m(Q) \tag{40}$$

时,有执行器失效的不确定离散系统(37)仍是D稳定的.

定理3和定理4的证明与定理1的证明过程类似,对执行器失效具有完整性的D稳定鲁棒容错控制器设计方法也与传感器失效的情况类似,限于篇幅,不再赘述.

4 设计示例

考虑不确定离散多变量线性系统(19),其中

$$A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}, \quad \Delta A(\sigma(k)) = \begin{bmatrix} 0.1\sin(0.05k) & 0.1\cos(0.05k) \\ 0.1\cos(0.05k) & 0.1\sin(0.05k) \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad \Delta B(\sigma(k)) = \begin{bmatrix} 0 & 0.2\sin(0.05k) \\ 0.2\cos(0.05k) & 0 \end{bmatrix}.$$

按文中给出的方法,取圆形区域 $D(0.3, 0.5)$,$Q_1 = I, R = I$, 可以求得

$$G = \begin{bmatrix} -0.4296 & -0.0998 \\ -0.2303 & -0.3282 \end{bmatrix}.$$

取 $Q = I$,容易验证,对传感器故障 $F_1 = \mathrm{diag}(0,1)$ 和 $F_2 = \mathrm{diag}(1,0)$,条件(24)式满足,故由定理2可知,控制器

$$u(k) = \begin{bmatrix} -0.4296 & -0.0998 \\ -0.2303 & -0.3282 \end{bmatrix} x(k)$$

是上述系统对传感器失效具有完整性的D稳定鲁棒容错控制器.

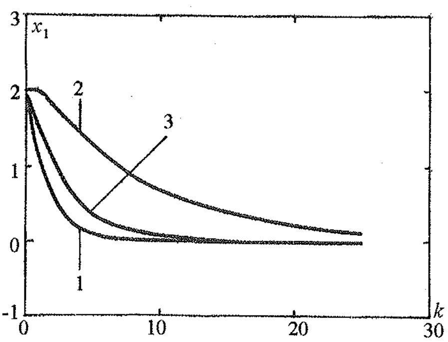

图 1 状态 x_1 的零输入响应

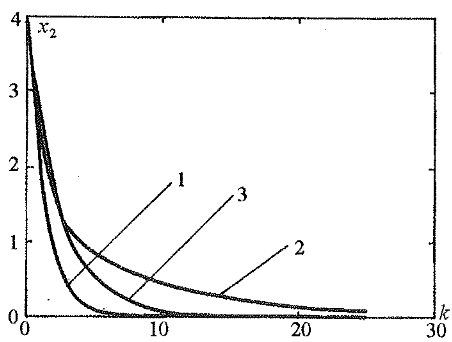

图 2 状态 x_2 的零输入响应

图1和图2是系统初始状态为 $x(0) = [2 \quad 4]^T$ 时的零输入响应曲线,图中,曲线1为传感器正常时系统的响应,曲线2,3分别为传感器 x_1, x_2 失效时的仿真结果.仿真结果表明,系统在

有传感器失效和参数不确定性的作用下仍具有较好的性能，说明本文提出的方法是有效的.

5 结束语

本文讨论了不确定离散系统的D稳定鲁棒容错控制问题，提出了一种D稳定鲁棒容错控制系统设计方法，设计示例及仿真结果表明这种方法简单、实用，所设计的控制器具有很好的容错性和鲁棒性.

参考文献

1 Siljak, D. D.. Reliable control using multiple control systems. Int. J. Control, 1980, 31(2): 303－329

2 Gao, Z. and Antsaklis, P. J.. Reconfigurable control system design via perfect model following. Int. J. Control, 1992, 56(4): 783－798

3 Ye, Y.. Fault-tolerant pole assignment for multivariable system using a fixed state feedback. Control Theory and Applications, 1993, 10(2): 212－218

4 孙金生等. 鲁棒容错控制系统设计. 控制理论与应用, 1994, 11(3): 376－380

5 Lee, C., et al.. Robustness of D-stability for discrete large-scale uncertain systems. Int. J. Systems Sci., 1993, 24(3): 479－498

6 Lee, T. and Lee, S.. Discrete optimal control with eigenvalue assigned inside a circular region. IEEE Trans. Automat. Contr., 1986, AC-31(10): 958－962

D-Stable Robust Fault-Tolerant Control for Uncertain Discrete Systems

SUN Jinsheng, LI Jun and WANG Zhiquan

(Department of Automatic Control, Nanjing University of Science & Technology · Nanjing, 210094, PRC)

Abstract: In this paper, on the basis of Lyapunov stability theory and linear transformation techniques, the problem of D-stable robust fault-tolerant control for discrete systems is studied. A sufficient condition that D-stable system possessing integrity against sensor failures is given. Then D-stable robust fault-tolerant control problem of uncertain discrete system is discussed, and develop the results to actuator failure case. Design method of D-stable robust fault-tolerant control system is given. Finally, an illustrative example and simulation results are given to demonstrate the effectiveness of the design method proposed in this paper.

Key words: Fault-tolerant control; D-stability; discrete systems; robustness; integrity

本文作者简介

孙金生 见本刊1998年第2期第271页.

李　军 见本刊1998年第2期第271页.

王执铨 见本刊1998年第2期第271页.