第15卷第4期
1998年8月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 15, No. 4
Aug., 1998

关于变系数线性微分方程的稳定性*

孙继涛　张银萍

(上海铁道大学应用数学所·上海,200331)

摘要：本文用矩阵测度和比较定理给出了变系数线性微分方程稳定性的一个简洁判据,对周期系数的线性微分方程给出了较为精确的渐近稳定判据,推广和改进了文[1]的工作.

关键词：变系数线性方程；稳定性；矩阵测度

对于变系数线性微分方程

$$\dot{x} = A(t)x \tag{1}$$

零解的稳定性问题,一直是人们关心的问题.近年来,已有不少研究结果[1~5].最近,文[1]用比较原理,构造 Lyapunov 函数并对单位基解矩阵 $\Phi(t,t_0)$ 进行估计,得到了方程(1)零解稳定性的一些有效判据,对周期系数的线性方程(1),则给出了关于渐近稳定的较精确的判据.

本文用不同于文[1]和文[4]的方法,借助于矩阵测度,简洁地建立了方程(1)的单位基解矩阵 $\Phi(t,t_0)$ 的范数与矩阵 $A(t)$ 的测度之间的关系,得到的有关稳定性判据比通常的主对角占优定理[5]和文[1]中的结论更广泛,对周期系数的线性系统(1),得到了较精致的判据.从而推广和改进了文[1]的工作.

先介绍矩阵测度的概念[6],一个实方阵 $A(t) = (a_{ij}(t))_{n\times n}$ 的测度定义如下

$$\mu_{\cdot}(A(t)) \triangleq \lim_{h\to 0^+} \frac{\| I + hA(t) \|_{\cdot} - 1}{h}. \quad (I\ 为单位矩阵)$$

当上式中范数分别是矩阵范数

$$\| A \|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|; \quad \| A \|_2 = [\lambda_{\max} A^* \cdot A]^{\frac{1}{2}};$$

$$\| A \|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|; \quad \| A \|_\omega = \max_j \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i}{\omega_j} |a_{ij}|$$

时,可计算出相应的矩阵测度为

$$\mu_1(A) = \max_j \{a_{jj} + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^n |a_{ij}|\}; \quad \mu_2(A) = \frac{1}{2}\lambda_{\max}(A^* + A);$$

$$\mu_\infty(A) = \max_i \{a_{ii} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^n |a_{ij}|\}; \quad \mu_\omega(A) = \max_j \{a_{jj} + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^n \frac{\omega_i}{\omega_j} |a_{ij}|\}.$$

这里 A^* 表示 A 的共轭转置,$\lambda_{\max}(B)$ 表示 B 的最大特征值. $\| A \|_{\cdot}$ 与 $\mu_{\cdot}(A)$ 相对应,$\cdot = 1, 2, \infty, \omega$.

设系统(1)中 $A(t)$ 为 $n\times n$ 阶连续矩阵(或分段连续矩阵),它的单位基解矩阵为 $\Phi(t,s)$.

定理 1　系统(1)的单位基解矩阵 $\Phi(t,t_0)$ 与 $A(t)$ 之间有下列关系

$$\| \Phi(t,t_0) \|_{\cdot} \leqslant \exp\int_{t_0}^t \mu_{\cdot}(A(s))\mathrm{d}s. \qquad (t \geqslant t_0)$$

---

* 上海铁道大学科技发展基金(Z9823)资助项目.

本文于1996年6月17日收到.1997年4月16日收到修改稿.

证　由于 $\Phi(t,t_0)$ 是方程(1) 的单位基解矩阵，故 $\dot{\Phi}(t,t_0)=A(t)\Phi(t,t_0)$，又

$$\frac{\mathrm{d}\|\Phi(t,t_0)\|_.}{\mathrm{d}t}-\mu_.(A)\|\Phi(t,t_0)\|_.$$

$$=\lim_{h\to0^+}\frac{1}{h}[\|\Phi(t+h,t_0)\|_.-\|I+hA(t)\|_.\|\Phi(t,t_0)\|_.]$$

$$\leqslant\lim_{h\to0^+}\frac{1}{h}[\|\Phi(t+h,t_0)\|_.-\|(I+hA(t))\Phi(t,t_0)\|_.]$$

$$\leqslant\lim_{h\to0^+}\frac{1}{h}\|\Phi(t+h,t_0)-\Phi(t,t_0)-hA(t)\Phi(t,t_0)\|_.$$

$$=\lim_{h\to0^+}\left\|\frac{\Phi(t+h,t_0)-\Phi(t,t_0)}{h}-A(t)\Phi(t,t_0)\right\|_.$$

$$=0,$$

因此 $\dfrac{\mathrm{d}\|\Phi(t,t_0)\|_.}{\mathrm{d}t}\leqslant\mu_.(A(t)\|\Phi(t,t_0)\|_.$，　$\|\Phi(t,t_0)\|_.\leqslant\exp\int_{t_0}^{t}\mu_.(A(s))\mathrm{d}s.$

定理 1 证毕.

推论　如果系统(1)中分段连续的实矩阵 $A(t)$ 满足

i) $\int_{t_0}^{+\infty}\mu_.(A(s))\mathrm{d}s<+\infty$，则系统(1) 稳定；

ii) $\mu_.(A(t))\leqslant0$，则系统(1) 一致稳定；

iii) $\int_{t_0}^{+\infty}\mu_.(A(t))\mathrm{d}s=-\infty$，则系统(1) 渐近稳定；

iv) $\mu_.(A(t))\leqslant-\alpha<0$，则系统(1)一致渐近稳定；

本文定理 1 比文[1]定理 1.2 更一般，证明更简洁. 本文推论优于文[1]中推论及比通常所用的主对角占优定理[5]要广泛.

下面考虑周期系数线性方程

$$\dot{x}=A(t)x,\quad A(t)=(a_{ij}(t))_{n\times n}. \tag{2}$$

其中 $A(t)$ 连续(或分段连接) 以 $T>0$ 为周期.

设方程(2) 的单位基解矩阵为 $\Phi(t,t_0)$，定义分段常系数矩阵为

$$A_h^+(t)=A\left(\left[\frac{t}{h}\right]h\right),\qquad(h>0)$$

易知当 $h\to0^+$ 时，$A_h^+(t)\to A(t)$.

设方程

$$\dot{x}=A_h^+(t)x \tag{3}$$

的单位基解矩阵为 $\widetilde{X}(t,t_0)$，并取 $h=\dfrac{T}{K}$　$(K\in Z^+)$，记

$$g_i=t_0+\left(\left[\frac{t-t_0}{h}\right]-i\right)h,\quad 0\leqslant i<P_0,$$

$$P_0=\left[\frac{t-t_0}{h}\right]-K\left[\frac{t-t_0}{T}\right],$$

于是 $\widetilde{X}(t,t_0)=\widetilde{\Phi}_{g_0}(t,g_0)\widetilde{\Phi}_{g_1}(g_0,g_1)\cdots\widetilde{\Phi}_{t_0}(t_0+h,t_0)$. 这里 $\dot{x}=A_h^+(s)x(t)$ 的单位基解矩阵为 $\widetilde{\Phi}_S(t,s)$.

定理 2　若存在 $h>0$ 满足

1) $\|A(t)-A_h^+(t)\|<\varepsilon$，　$\forall\, t\in[t_0,+\infty)$；

2) 存在 $M,N\in\mathbb{R}$,使得 $\forall\, s,t\in[t_0,t_0+T),s<t$ 都有 $\int_s^t\mu.(A_h^+(s))\mathrm{d}s\leqslant MT+N$;

3) 存在 $\gamma\in\mathbb{R}$,使得

$\|\widetilde{\Phi}_{t_0+(K-1)h}(t_0+Kh,t_0+(K-1)h)\widetilde{\Phi}_{t_0+(K-2)h}(t_0+(K-1)h,t_0+(K-2)h)\cdots\widetilde{\Phi}_{t_0}(t_0+h,t_0)\|\leqslant \mathrm{e}^{-\gamma T}$;

4) $-\gamma+\varepsilon\mathrm{e}^{(M+\gamma)T+N}<0$,

则方程(2)的零解指数渐近稳定.

证 通过逐段积分,由方程(3)解得

$\widetilde{X}(t,t_0)=\widetilde{\Phi}_{g_0}(t,g_0)\widetilde{\Phi}_{g_1}(g_0,g_1)\cdots\widetilde{\Phi}_{p_0}(p_0+h,p_0)\widetilde{\Phi}_{p_0-h}(p_0,p_0-h)\cdots\widetilde{\Phi}_{t_0}(t_0+h,t_0)$,于是由于周期性、条件2),3)和定理1有

$$\begin{aligned}\|\widetilde{X}(t,t_0)\|\leqslant&\ \|\widetilde{\Phi}_{g_0}(t,g_0)\widetilde{\Phi}_{g_1}(g_0,g_1)\cdots\widetilde{\Phi}_{p_0}(p_0+h,p_0)\|\\&\cdot[\|\widetilde{\Phi}_{t_0+(K-1)h}(t_0+Kh,s+(K-1)h)\cdot\widetilde{\Phi}_{t_0+(K-2)h}(t_0+(K-1)h,\\&\quad s+(K-2)h)\cdots\widetilde{\Phi}_{t_0}(t_0+h,t_0)\|]^{\left[\frac{t-t_0}{T}\right]}\\\leqslant&\ \exp\{M(t-t_0)-\left[\frac{t-t_0}{T}\right]T)+N\}\exp\{-\gamma\left[\frac{t-t_0}{T}\right]T\}\\\leqslant&\ \exp\{-\gamma(t-t_0)+N+(M+\gamma)T\}.\quad(t\geqslant t_0)\end{aligned}$$

将方程(2)改写为

$$\dot{x}=A_h^+(t)x+[A(t)-A_h^+(t)]x,$$

则由常数变易公式得

$$\Phi(t,t_0)=\widetilde{X}(t,t_0)+\int_{t_0}^t\widetilde{X}(t,s)[A(s)-A_h^+(s)]\Phi(s,t_0)\mathrm{d}s,$$

于是

$$\begin{aligned}\|\Phi(t,t_0)\|\leqslant&\ \|\widetilde{X}(t,t_0)\|+\int_{t_0}^t\|\widetilde{X}(t,s)\|\ \|A(s)-A_h^+(s)\|\ \|\Phi(s,t_0)\|\mathrm{d}s\\\leqslant&\ \exp\{-\gamma(t-t_0)+(M+\gamma)T+N\}\\&+\int_{t_0}^t\varepsilon\exp\{-\gamma(t-s)+(M+\gamma)T+N\}\|\Phi(s,t_0)\|\mathrm{d}s.\quad(t\geqslant t_0)\end{aligned}$$

考虑积分方程

$$\begin{aligned}\omega=&\ \exp\{-\gamma(t-t_0)+(M+\gamma)T+\varepsilon\}\\&+\varepsilon\int_{t_0}^t\exp\{-\gamma(t-s)+(M+\gamma)T+N\}\omega(s)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

由积分不等式知 $\|\Phi(t,t_0)\|\leqslant\omega(t)$, $(t\geqslant t_0)$. $\omega(t)$ 即为下列常微分方程的初值解

$$\begin{cases}\dot{\omega}=[-\gamma+\varepsilon\exp\{(M+\gamma)T+N\}]\omega,\\\omega(t_0)=\exp\{(M+\gamma)T+N\}.\end{cases}\tag{4}$$

由条件4)知;方程(4)的零解指数渐近稳定,故方程(2)的零解指数渐近稳定. 证毕.

注 本文定理2显然比文[1]中定理3.1使用范围更广,条件更优.

参 考 文 献

1 肖淑贤.关于变系数线性方程的稳定性.系统科学与数学,1996,(2):149-158

2 秦元勋,王联,王慕秋.缓变系数动力系统的运动稳定性.中国科学(数学专辑),1979,242－253
3 廖晓昕.稳定性的数学理论及其应用.武汉:华中师范大学出版社,1988
4 [日]须田信英等著.自动控制中的矩阵理论.中译本,北京:科学出版社,1979,395
5 Harris,C. J. and Miles,J. F.. Stability of Linear Systems. New York:Acad. Press,1980
6 Vidyasagar,M.. Nonlinear Systems Analysis. Englewood Cliffs,NJ;Prentice-Hall,Inc. 1978

On the Stability of Linear Differential Equation with Varying Coefficients

SUN Jitao and ZHANG Yinping

(Institute of Applied Mathematics,Shanghai Tiedao University · Shanghai,200331,PRC)

Abstract: In this paper,we investigate the stability of the linear differential equation with varying coefficients $\dot{x}(t) = A(t)x$. Some simple criteria of stability are given. In addition,for the linear differential equation with periodic coefficients one of the more exact criteria of asymptotic stability is given by matrix measure and comparison theory. The results of paper[1] are extended and improved.

Key words: linear equation with varying coefficients; stability; matrix measure

本文作者简介

孙继涛　1963年生.1983年7月南京大学数学系毕业后在华东冶金学院任教.1997年10月调至上海铁道大学应用数学研究所工作.现为上海铁道大学教授.近年来对常微分方程和鲁棒控制理论及应用较感兴趣,在国内外发表学术论文六十余篇,成果被收入《现代数学丛书》专著和国内外主要检索系统,获科技进步奖四项.

张银萍　1962年生.1983年7月安徽大学数学系毕业后在华东冶金学院任教,1989年3月在南京理工大学获硕士学位.1997年10月调至上海铁道大学应用数学研究所工作,现为上海铁道大学副教授.近年来,对鲁棒控制理论与应用等较有兴趣。在国内外发表学术论文二十余篇,获科技进步奖三项.