

具有模型和实际差异的非线性离散动态系统最优控制*

李俊民

(西安电子科技大学应用数学系·西安, 710071)

万百五

黄正良

(西安交通大学系统工程研究所·西安, 710049) (西南工学院·四川绵阳, 621022)

摘要: 针对模型与实际存在一定差异的情况, 提出了一种求解非线性离散系统最优控制的动态系统优化和参数估计集成(Dynamic Integrated System Optimization and Parameter Estimation, 简称 DISOPE)的研究法. 推导出一组求解一类有终端等式约束的非齐次的线性两点边值问题的递推公式, 对于有终端等式约束的非线性最优控制问题得到了在计算上易于实现的一种 DISOPE 迭代算法, 通过修正的基于模型优化和参数估计的迭代求解, 获得实际控制问题的最优解. 给出了该算法收敛的一个充分条件, 仿真例子说明了该算法的性能.

关键词: 非线性离散动态系统; 模型失配; 动态系统优化与参数估计集成; 终端等式约束; 收敛性和最优性

Optimal Control of Nonlinear Discrete Systems With Model-Reality Differences

Li Junmin

(Department of Applied Mathematics, Xidian University·Xian, 710071, P. R. China)

Wan Baiwu

(Institute of Systems Engineering, Xi'an Jiaotong University·Xi'an, 710049, P. R. China)

Huang Zhengliang

(Southwest Institute of Technology·Sichuan Mianyang, 621002, P. R. China)

Abstract: An iterative algorithm of dynamic integrated system optimization and parameter estimation (DISOPE) approach is presented for solving nonlinear discrete optimal control problems where the model-reality differences exist. An implementable algorithm by means of alternative solving the problem of system optimization on the basis of a linear quadratic problem and of differences. A method of recursive solving nonhomogeneous linear two-point-boundary problem with terminal equality constraints is induced. A sufficient condition of the convergence is also given. The simulation example illustrates the efficiency of the algorithm.

Key words: nonlinear discrete-time dynamic systems; model-reality differences; dynamic integrated system optimization and parameter estimation; final states equality constraints; convergence and optimality

1 引言(Introduction)

P. D. Roberts^[1]首先将稳态优化中的 ISOPE 研究方法^[1]推广到非线性连续动态系统优化控制问题, 得到动态系统优化与参数估计集成(DISOPE)方法. 文[2]对动态大系统得到动态系统优化与参数估计集成方法. 由于一方面文[3]所提算法需要求解一组非线性微分方程, 计算复杂; 另一方面实际系统用计算机控制时都要对系统采样并离散化, 因此, 本文直接对非线性离散动态系统, 提出了一种动态系统优化与参数估计集成研究法, 推导出了一组求解一类有

终端等式约束的非齐次的线性两点边值问题的递推公式, 对于有终端等式约束的非线性最优控制问题得到了在计算上易于实现的一种 DISOPE 迭代算法, 在实际与模型存在差异的情况下, 通过修正的基于模型优化和参数估计的迭代求解, 获得实际控制问题的最优解. 仿真例子说明了该算法的性能.

2 问题的描述(Problem Statement)

考虑实际非线性最优控制问题(ROP)

$$\min \left\{ \phi(x(N)) + \sum_{k=0}^{N-1} L^*(x(k), u(k)) \right\}$$

* 国家自然科学基金(69674003)资助项目.

本文于1996年7月11日收到, 1997年12月17日收到修改稿.

$$\text{s.t.} \begin{cases} x(k+1) = f^*(x(k), u(k)), \\ x(0) = x_0, x_i(N) = x_{iN}, i = 1, \dots, q, q < n. \end{cases} \quad (1)$$

其中 $x(k) \in \mathbb{R}^n, u(k) \in \mathbb{R}^m$ 分别为离散时刻 k 时的状态和控制向量, $\varphi(x(N))$ 是终止状态的正实值函数, $L^*(\cdot, \cdot)$ 是实际性能指标, $f^*(\cdot, \cdot)$ 是实际状态方程. 由于 L^*, f^* 相当复杂, 式(1)很难求解. 从实际角度出发, 考虑下面简单的基于模型优化控制问题(MOP):

$$\begin{aligned} \min & \{ \Phi(x(N)) + \sum_{k=0}^{N-1} L(x(k), u(k), \gamma(k)) \} \\ \text{s.t.} & \begin{cases} x(k+1) = f(x(k), u(k), \alpha(k)), \\ x(0) = x_0, x_i(N) = x_{iN}, i = 1, \dots, q, q < n. \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $\alpha(k) \in \mathbb{R}^s, \gamma(k) \in \mathbb{R}$ 是参数变量, 分别通过模型与实际状态方程和性能指标匹配来确定. $L(\cdot, \cdot, \cdot): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是模型性能指标, $f(\cdot, \cdot, \cdot): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是模型状态方程. 参数估计值是上次系统优化问题解的函数, 反过来, (2)的解 $u(k)$ 又是估计参数 $\alpha(k), \gamma(k)$ 的函数. 因此, 系统优化问题与参数估计问题相互影响, 须适当地考虑 MOP (2)与参数估计问题之间的交互作用.

考虑与 ROP (1) 等价的扩展优化控制问题 (EOP):

$$\begin{aligned} \min & \{ \phi(x(N)) + \sum_{k=0}^{N-1} [L(x(k), u(k), \gamma(k))] \} \\ \text{s.t.} & \begin{cases} x(k+1) = f(x(k), u(k), \alpha(k)), \\ x(0) = x_0, x_i(N) = x_{iN}, i = 1, \dots, q, q < n, \\ f^*(z(k), v(k)) = f(z(k), v(k), \alpha(k)), \\ L^*(z(k), v(k)) = L(z(k), v(k), \gamma(k)), \\ u(k) = v(k), \\ x(k) = z(k). \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

其中 $z(k), v(k)$ 的引入是为了分离基于模型优化问题和参数估计问题.

由变分法得到如下最优性必要条件

$$\begin{cases} L_u^T - \lambda(k) + f_u^T p(k+1) = 0, \\ L_x^T - \beta(k) + f_x^T p(k+1) - p(k) = 0, \\ x(k+1) = f(x(k), u(k), \alpha(k)), \\ x(0) = x_0, x_i(N) = x_{iN}, i = 1, \dots, q, q < n, \\ p_i(N) = \left[\frac{\partial \phi(x(N))}{\partial x_i(N)} \right], i = q+1, \dots, n, \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} f(z(k), v(k), \alpha(k)) = f^*(z(k), v(k)), \\ L(z(k), v(k), \gamma(k)) = L^*(z(k), v(k)), \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} \lambda(k) = \left[\frac{\partial f}{\partial v(k)} - \frac{\partial f^*}{\partial v(k)} \right]^T \bar{p}(k+1) + \frac{\partial L}{\partial v(k)} - \frac{\partial L^*}{\partial v(k)}, \\ \beta(k) = \left[\frac{\partial f}{\partial z(k)} - \frac{\partial f^*}{\partial z(k)} \right]^T \bar{p}(k+1) + \frac{\partial L}{\partial v(k)} - \frac{\partial L^*}{\partial z(k)}, \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} z(k) = x(k), \\ v(k) = u(k). \end{cases} \quad (7)$$

其中 $p(k)$ 是协状态向量, $\lambda(k), \beta(k)$ 是 Lagrange 乘子, $x_N \triangleq (x_{1N}, \dots, x_{qN})^T, \bar{p}(k)$ 的引入是为了分离基于模型优化问题和修正因子的计算.

优化条件(5)定义了参数估计问题, 条件(6)用来确定修正因子, (7)既分离了系统优化问题和参数估计问题, 又代表着这两个问题的交互作用. 在给定参数 $\alpha(k), \gamma(k)$ 和修正因子 $\lambda(k), \beta(k)$ 及 $z(k), v(k)$ 确定的情况下, 下面修正的基于模型的优化控制问题(MMOP)满足条件(4).

$$\begin{aligned} \min & \{ \phi(x(N)) + \sum_{k=0}^{N-1} [L(x(k), u(k), \gamma(k)) - \lambda^T(k)u(k) - \beta^T(k)x(k)] \} \\ \text{s.t.} & \begin{cases} x(k+1) = f(x(k), u(k), \alpha(k)), \\ x(0) = x_0, x_i(N) = x_{iN}, i = 1, \dots, q, q < n. \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$$

3 离散时间 DISOPE 算法 (DISOPE algorithm for discrete-time systems)

基于以上分析, 假设 $L(\cdot, \cdot, \cdot), f(\cdot, \cdot, \cdot), x_0, x_N, N$ 已知, L^*, f^* 及其所有 Jacobi 矩阵是可以计算的, 得到下面算法 1.

算法 1 1° 求出标称解 $u^0(k), x^0(k), p^0(k)$, 置 $i = 0, v^0(k) = u^0(k), z^0(k) = x^0(k)$.

2° 由(5)估计参数 $\alpha^i(k), \gamma^i(k)$.

3° 由(6)式计算修正乘子 $\lambda^i(k), \beta^i(k)$.

4° 求解 MMOP(8) 得新的状态及新协态和新控制 $x^{i+1}(k), p^{i+1}(k), u^{i+1}(k)$.

5° 由下面松弛公式更新 $v^i(k), z^i(k)$ 及 $p^i(k)$

$$\begin{cases} v^{i+1}(k) = v^i(k) + k_v(u^{i+1}(k) - v^i(k)), \\ z^{i+1}(k) = z^i(k) + k_z(x^{i+1}(k) - z^i(k)), \\ \bar{p}^{i+1}(k) = \bar{p}^i(k) + k_p(p^{i+1}(k) - \bar{p}^i(k)), \end{cases} \quad (9)$$

如果 $\sum_{k=0}^{N-1} \|v^{i+1}(k) - v^i(k)\| < \text{eps}$ (eps 为控制精度), 则停止迭代, 否则令 $i = i + 1$, 返回 2°.

4 基于线性二次型问题的可实现 DISOPE 方法 (Implemental DISOPE algorithm based on linear-quadratic problem)

为了计算上易于实现, 提出一个 MOP(2) 为线性二次型问题的 DISOPE 方法. 考虑下面修正的基于线性模型的优化控制问题 (MMOP)

$$\begin{aligned} \min & \left\{ \frac{1}{2} x^T(N) \Phi x(N) + \gamma(N) + \right. \\ & \left. \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} [u^T(k) R u(k) + x^T(k) Q x(k) + \right. \\ & \left. 2\gamma(k) - 2\beta^T(k) x(k) - 2\lambda^T(k) u(k)] \right\} \\ \text{s.t.} & \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + \alpha(k), \\ x(0) = x_0, x_i(N) = x_{iN}, i = 1, \dots, q, q < n. \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

其中 Q, Φ 为半正定阵, R 为正定阵.

假设 MMOP 是正则的, 即 (10) 的加权 Gramian 阵 ($W(0)$) 是可逆的^[4]. 选择参数 $\alpha(k), \gamma(k)$ 为漂移参数, 由式确定

$$\begin{cases} f^*(z(k), v(k)) = Az(k) + Bv(k) + \alpha(k), \\ L^*(z(k), v(k)) = \frac{1}{2} (u^T(k) R u(k) + \\ x^T(k) Q x(k) + 2\gamma(k)). \end{cases} \quad (11)$$

修正因子的计算公式(6)变为

$$\begin{cases} \lambda(k) = \left[B - \frac{\partial f^*}{\partial v(k)} \right]^T \bar{p}(k+1) + \\ Rv(k) - \frac{\partial L^*}{\partial v(k)}, \\ \beta(k) = \left[A - \frac{\partial f^*}{\partial z(k)} \right]^T \bar{p}(k+1) + \\ Qz(k) - \frac{\partial L^*}{\partial z(k)}, \end{cases} \quad (12)$$

利用离散系统的极大值原理, 得到如下非齐次两点边值问题

$$\begin{cases} x(k+1) = A(k) - B(k)R^{-1}(B^T p(k+1) - \\ \lambda(k)) + \alpha(k), \\ p(k) = Qx(k) + A^T p(k+1) - \beta(k), \\ u(k) = -R^{-1}(B^T p(k+1) - \lambda(k)), \\ x(0) = x_0, x_i(N) = x_{iN}, i = 1, \dots, q, q < n, \\ p(N) = [\Phi x(N)]_i, i = q+1, \dots, n. \end{cases} \quad (13)$$

对于齐次两点边值问题, 文[4]给出了其解的递推公式, 下面推导求解(13)的递推公式. 假设如下两式对所有 k 均成立

$$p(k) = G(k)x(k) + g(k) + F(k)\pi, \quad (14)$$

$$x_N = U(k)x(k) + W(k)\pi + l(k). \quad (15)$$

其中 $G(k) \in \mathbb{R}^{n \times n}, g(k) \in \mathbb{R}^n, U(k) \in \mathbb{R}^{q \times n}, W(k) \in \mathbb{R}^{q \times q}, l(k) \in \mathbb{R}^q, F(k) \in \mathbb{R}^{n \times q}$, 而 $\pi \in \mathbb{R}^q$ 是 Lagrange 乘子.

由(13)、(14)得

$$\begin{aligned} x(k+1) = & (I + BR^{-1}B^T G(k+1))^{-1} (Ax(k) - \\ & BR^{-1}B^T (F(k+1)\pi + g(k+1)) + \\ & BR^{-1}\lambda(k) + \alpha(k)). \end{aligned} \quad (16)$$

因为假设(14)、(15)对任意 k 成立, 根据(13)、(14)、(15)及(16)不难得到两个关于 $x(k), \pi$ 及非齐次项的恒等式, 由恒等式两端对应项相等得到如下递推公式

$$\begin{cases} G(k) = Q + A^T G(k+1)A - A^T G(k+1) \cdot \\ B(B^T G(k+1)B + R)^{-1} B^T G(k+1)A, \\ G(N) = \Phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Phi \end{bmatrix}_{n-q}^q, \\ F(k) = (A - B(B^T G(k+1)B + \\ R)^{-1} B^T G(k+1)A)^T F(k+1), \\ F(N) = \begin{bmatrix} I_q \\ 0 \end{bmatrix}, \\ W(k) = W(k+1) - F^T(k+1)B(B^T G(k+1) \\ B + R)^{-1} B^T F(k+1), \\ W(N) = 0, \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} g(k) = A^T (I - G(k+1)B(B^T G(k+1)B + \\ R)^{-1} B^T g(k+1) + A^T (I - G(k+1) \\ B(B^T G(k+1)B + R)^{-1} B^T) G(k+1) \\ a(k) + A^T G(k+1)B(B^T G(k+1) \\ B + R)^{-1} \lambda(k) - \beta(k), \\ g(N) = 0, \\ l(k) = l(k+1) - F^T(k+1)B(B^T G(k+1) \\ B + R)^{-1} B^T g(k+1) + F^T(k+1) \\ B(B^T G(k+1)B + R)^{-1} \lambda(k) + \\ F^T(k+1)(I - B(B^T G(k+1)B + \\ R)^{-1} B^T G(k+1))\alpha(k), \\ l(N) = 0, \\ \pi = -W^{-1}(0)[F^T(0)x(0) + l(0)]. \end{cases} \quad (18)$$

假设 $A, B, Q, R, N, x_0, \Phi, k_z, k_v, k_p$ 已知, f^* , L^* 及其所有 Jacobi 矩阵是可以计算的, 由以上分析和推导得到下面易于实现的 DISOPE 算法 2.

算法 2 1° 求出标称解 $u^0(k), x^0(k), p^0(k)$, 置 $i = 0, v^0(k) = u^0(k), z^0(k) = x^0(k)$.

2° 由(11)估计参数 $a^i(k)$.

3° (12) 计算修正乘子 $\lambda^i(k), \beta^i(k)$.

4° 反向求解 Riccati 方程组(17)、(18), 保存得到的 $G(k), F(k)$ 及 $W(0), g^i(k), l^i(0)$ 和 π^i .

5° 由(13)、(14)和(16)求得新的状态及新协态及新控制 $x^{i+1}(k), p^{i+1}(k), u^{i+1}(k)$.

6° 由松弛公式(9)更新控制量, 状态量和协状态量, 如果 $\sum_{k=0}^{N-1} \|v^{i+1}(k) - v^i(k)\| < \text{eps}$ (eps 为控制精度), 则停止迭代; 否则令 $i = i + 1$, 返回 2°.

注 1 算法 2 起动所需的标称解可在 $\alpha(k) = 0, \gamma(k) = 0, \lambda(k) = 0, \beta(k) = 0 (k = 0, 1, \dots, N - 1)$ 时求解 MMOP(10)而得到.

5 算法的收敛性和最优性分析 (The Convergence and optimality of the algorithm)

下面的假设是基本前题条件:

假设 1 实际最优控制问题的最优解 $u^*(k), x^*(k), p^*(k)$ 在给定的边界条件下存在而且唯一.

假设 2 $f^*(\cdot, \cdot)$ 及 $L^*(\cdot, \cdot)$ 的所有 Jacobi 矩阵在 $[0, N - 1]$ 上存在并且连续.

5.1 算法映射 (Algorithm mapping)

在算法 2 的迭代过程中, 矩阵 $G(k), W(k), F(k)$ 是不变的, 该算法的第 i 次迭代量到第 $i + 1$ 次迭代量之间的映射关系由(11)~(18)和(9)确定.

由(16)得

$$x^{i+1}(k) =$$

$$\Phi(k, 0)x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \Phi_2(k, j)x_0 +$$

$$\sum_{j=0}^{k-1} [\Phi_1(k, j)(g^i(j) - F(j)W^{-1}(0)l^i(0)) +$$

$$\Phi_0(k, j)h_1(y^i(j))]$$

$$= \eta_x(k)x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} [\Phi_1(k, j)(g^i(j) -$$

$$F(j)W^{-1}(0)l^i(0)) + \Phi_0(k, j)h_1(y^i(j))]. \quad (19)$$

其中 $\Phi(k, j) (j = 0, \dots, k - 1)$ 是(16)的状态转移矩阵,

$$\Phi_0(k, j) = \Phi(k, j)(I + BR^{-1}B^TG(j+1))^{-1},$$

$$\Phi_1(k, j) = \Phi_0(k, j)BR^{-1}B^T,$$

$$\Phi_2(k, j) = \Phi_1(k, j)F(j+1)W^{-1}(0)F^T(0),$$

$$\eta_x(k) = \Phi(k, 0) + \sum_{j=0}^{k-1} \Phi_2(k, j),$$

$$h_1(y^i(j)) = BR^{-1}\lambda^i(k) + \alpha^i(k),$$

$$y^i(k) = [v^i(k)^T, z^i(k)^T, \tilde{p}^i(k+1)^T]^T.$$

由(13)、(14)和(19)得

$$\begin{aligned} p^{i+1}(k) = & \eta_p(k)x_0 + G(k) \sum_{j=0}^{k-1} [\Phi_1(k, j)g^i(j) + \\ & \Phi_0(k, j)h_1(y^i(j))] - \\ & [\sum_{j=0}^{k-1} (G(k)\Phi_1(k, j)F(j)) + \\ & F(k)]W^{-1}(0)l^i(0) + g^i(k), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} u^{i+1}(k) = & \eta_u(k)x_0 - \sum_{j=0}^k [\bar{\Phi}_1(k+1, j)g^i(j) + \\ & \bar{\Phi}_0(k, j)h_1(y^i(j))] + \\ & [\sum_{j=1}^k (\bar{\Phi}_1(k+1, j)F(j)) + \\ & F(k+1)]W^{-1}(0)l^i(0) - \\ & R^{-1}B^Tg^i(k+1) + R^{-1}\lambda^i(k). \end{aligned} \quad (21)$$

其中

$$\eta_p(k) = G(k)\eta_x(k),$$

$$\eta_u(k) = -R^{-1}B^T\eta_p(k+1),$$

$$\bar{\Phi}_1(k+1, j) = R^{-1}B^TG(k+1)\Phi_1(k+1, j),$$

$$\bar{\Phi}_0(k+1, j) = R^{-1}B^TG(k+1)\Phi_0(k+1, j).$$

由(18)得

$$\begin{bmatrix} g^i(k) \\ l^i(k) \end{bmatrix} = E(k+1) \begin{bmatrix} g^i(k+1) \\ l^i(k+1) \end{bmatrix} + h_2(y^i(k)). \quad (22)$$

其中 $E(k+1)$ 是反向系数矩阵, $h_2(y^i(k))$ 是(22)式的非齐次项.

由(22)和(18)的边界条件得

$$\begin{bmatrix} g^i(k) \\ l^i(k) \end{bmatrix} = \sum_{j_1=N}^{k+1} \Psi(k, j_1)h_2(y^i(j_1)). \quad (23)$$

这里 $\Psi(k, j_1)$ 是(22)的反向状态转移矩阵.

由(23)得

$$\begin{aligned} l^i(0) = & \sum_{j_1=N}^1 \varphi_2(0, j_1)h_2(y^i(j_1)), \\ \Psi(k, j_1) = & \begin{bmatrix} \varphi_1(k, j_1) \\ \varphi_2(k, j_1) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (24)$$

由(19)~(24)和(9)得算法映射为

$$\begin{aligned}
y^{i+1}(k) = & (I_{2n+m} - K)y^i(k) + K\eta(k)x_0 + \\
& K \sum_{j=0}^k \Theta_1(k, j) W^{-1}(0) \sum_{j_1=N}^1 \varphi_2(0, j_1) h_2(y^i(j_1)) + \\
& K \sum_{j=0}^k [\Theta_2(k, j) \sum_{j_1=N}^{j+1} (\varphi_1(j, j_1) h_2(y^i(j_1))) + \\
& \Theta_0(k, j) h_1(y^i(j))] + Kh_3(y^i(k)) + \\
& K\Omega \sum_{j_1=N}^{k+2} \varphi_1(k+1, j_1) h_2(y^i(j_1)). \quad (25)
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{cases} \eta(k) = \begin{bmatrix} \eta_u(k) \\ \eta_x(k) \\ \eta_p(k+1) \end{bmatrix}, \\ \Theta_1(k, j) = \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_1(k+1, j) \\ \Phi_1(k, j) \\ G(k+1)\Phi_1(k+1, j) \end{bmatrix}, \\ \Theta_0(k, j) = \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_0(k+1, j) \\ \Phi_0(k, j) \\ G(k+1)\Phi_0(k+1, j) \end{bmatrix}, \\ K = \text{Blockdiag}\{k_v I_m, k_z I_n, k_p I_n\}, \\ h_3(y^i(k)) = [(R^{-1}\lambda^i(k))^T \quad 0_n^T \quad 0_n^T]^T, \end{cases} \quad (26)$$

$$\Omega = [(-R^{-1}B^T) \quad 0_n^T \quad I_n]^T.$$

5.2 收敛性 (Convergence)

6 仿真例子 (Simulation example)

考虑下面四阶非二次型的非线性系统, 它代表平面上的二自由度机器人操作手的转移问题。

$$\begin{aligned}
\min_{u(k)} & \left\{ \frac{1}{2} x^T(N) \Phi x(N) + \frac{1}{2} T \sum_{k=0}^{N-1} (x_1^2(k) + x_2^4(k) + x_3^2(k) + x_4^4(k) + u_1^2(k) + 0.1 u_2^4(k)) \right\} \\
\text{s.t.} & \begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + T x_2(k), \quad x_1(0) = 2, \quad x_1(N) = 0; \\ x_2(k+1) = x_2(k) + T \frac{u_1(k) - 4x_2(k)x_4(k)(x_3(k) + 0.5)}{1 + 2(x_3(k) + 0.5)}, \quad x_2(0) = 0, \quad x_2(N) = 0; \\ x_3(k+1) = x_3(k) + T x_4(k), \quad x_3(0) = 1, \quad x_3(N) = 0; \\ x_4(k+1) = x_4(k) + T((x_3(k) + 0.5)x_2^2(k) + 0.5u_2(k)), \quad x_4(0) = 0, \quad x_4(N) = 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

其中 $x_1(k), x_2(k)$ 代表一个关节链的位置和速度, $x_3(k), x_4(k)$ 代表另一个关节链的位置和速度. T 为采样周期, $N = [4/T]$, $[\cdot]$ 是取整运算。

基于模型的优化控制问题 (MOP) 为如下形式

$$\begin{aligned}
\min_{u(k)} & \left\{ \frac{1}{2} x^T(N) \Phi x(N) + \frac{1}{2} T \sum_{k=0}^{N-1} (x^T(k)x(k) + u^T(k)u(k) + \gamma(k)) \right\} \\
\text{s.t.} & \begin{cases} x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ T & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.5T \end{bmatrix} u(k) + \alpha(k), \end{cases}
\end{aligned}$$

为了利用压缩映射原理证明该算法的收敛性, 附加一个假设条件:

假设 3 函数 $h_1(y(k)), h_2(y(k)), h_3(y(k))$ 对所有 $y(k)$ 是 Lipschitz 连续的, 即存在 Lipschitz 常数 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 使下式成立

$$\begin{cases} \|h_1(y^i(k)) - h_1(y^{i-1}(k))\| \leq \sigma_1 \|y^i(k) - y^{i-1}(k)\|, \\ \|h_2(y^i(k)) - h_2(y^{i-1}(k))\| \leq \sigma_2 \|y^i(k) - y^{i-1}(k)\|, \\ \|h_3(y^i(k)) - h_3(y^{i-1}(k))\| \leq \sigma_3 \|y^i(k) - y^{i-1}(k)\|. \end{cases} \quad (27)$$

定理 1 算法 2 收敛的一个充分条件为

$$\begin{aligned}
\sigma = & \|I - K\| + \sigma_3 k_v + (\epsilon_1(N)\sigma_1 + \\
& (\epsilon_2(N) + \epsilon_3(N) + \epsilon_4(N))\sigma_2)N < 1, \\
\epsilon_1(N) = & \sup_{k \in [0, N-1]} \sup_{j \in [0, N-1]} \|K\Theta_0(k, j)\|,
\end{aligned}$$

$$\epsilon_2(N) = \sup_{k \in [0, N-1]} \sup_{j \in [0, N-1]} \|K\Theta_2(k, j) \sum_{j_1=N}^{j+1} \varphi_1(j, j_1)\|.$$

其中

$$\epsilon_3(N) = \sup_{k \in [0, N-1]} \sup_{j \in [0, N-1]} \|K\Theta_1(k, j) W^{-1}(0) \sum_{j_1=N}^1 \varphi_2(0, j_1)\|,$$

$$\epsilon_4(N) = \sup_{k \in [0, N-1]} \sup_{j \in [0, N-1]} \|K\Omega \varphi_1(k+1, j)\|.$$

证 由算法映射 (25), 对相继两次迭代变量的差两端取范数并利用 (26), (27) 得充分条件 (28)。

定理 2 算法的收敛解就为实际问题最优解。

从算法的推导及假设 1 很容易得到此结论。

$$x(0) = (2 \ 0 \ 1 \ 0)^T, \quad x(N) = (0 \ 0 \ 0 \ 0)^T.$$

这里 $\alpha(k)$, $\gamma(k)$ 均为参数, 选择 $T = 0.02$, 算法终止误差为 $\text{eps} = 0.05$, 在迭代 49 次后收敛, 最优状态, 控制和协状态及标称的初始状态见图 1.

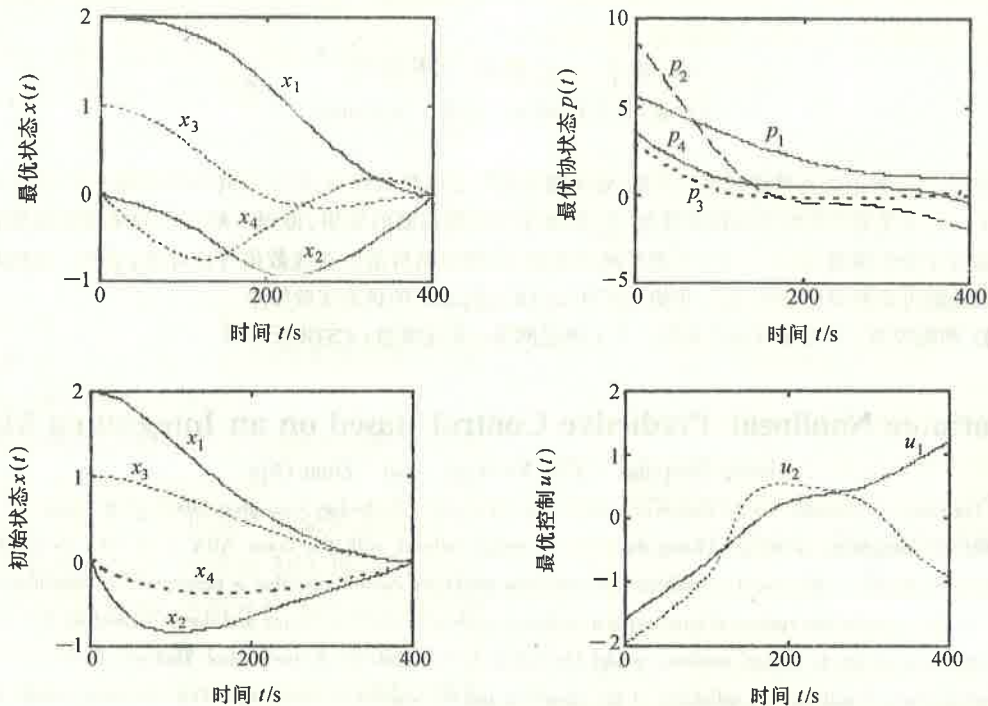


图 1 最优状态、最优协状态和开始状态及最优控制曲线

Fig. 1 Optimal states, optimal costates, initial states and optimal control curves

7 结论(Conclusion)

本文对非线性离散动态系统提出了动态系统优化和参数估计集成的研究法. 得到一种基于线性二次型问题的 DISOPE 递推迭代算法, 在模型和实际有差异时, 通过迭代求解系统优化和参数估计问题, 获得实际控制问题的最优解. 分析了算法 2 的收敛性和最优性, 仿真例子说明该算法的有效性. 当实际问题精确表示未知时, 本文算法的参数估计及修正因子的计算问题需要进一步研究.

参考文献(References)

- 1 Roberts P D. Optimal control of nonlinear systems with model-reality differences. 31th Conference of Decision and Control, Tucson, USA, 1992, 258 - 261
- 2 Becerra V M and Roberts P D. A hierarchical extension of dynamic integrated system optimization and parameter estimation. IFAC on Large Scale System, London, UK, 1995

- 3 Roberts P D, Wan B W and Lin J. Steady-state hierarchical control of large scale systems: a survey. Proc. of IFAC/IFORS/IMACS Symposium on Large Scale System, Beijing, 1992
- 4 Lewis F L. Optimal Control. London: A Wiley Interscience Publication, 1986
- 5 Singh M G. Dynamical Hierarchical Control. New York: North-Holland, 1980

本文作者简介

李俊民 1965 年生. 1998 年毕业于西安交通大学, 获博士学位, 现为西安电子科技大学副教授. 研究方向有非线性动态系统优化控制, 自适应控制和智能控制.

万百五 1928 年生. 教授, 博士生导师. 1951 年上海交通大学电信研究所研究生毕业. 现为西安交通大学系统所大系统室主任, 主要方向为大系统优化递阶控制, 大系统智能控制等, 国内外发表文章 180 篇, 曾获得国家教委科技进步奖一次、二等奖两次.

黄正良 1962 年生. 1993 年毕业于西安交通大学, 获博士学位. 现为西南工学院副院长, 教授. 研究方向有工业过程稳态优化, 系统辨识等.