

广义系统 Wiener 滤波和 Kalman 滤波新方法^{*}

邓自立 许 燕

(黑龙江大学应用数学研究所·哈尔滨, 150080)

摘要: 应用时域上的现代时间序列分析方法, 基于 ARMA 新息模型和白噪声估计理论, 提出了广义系统的 Wiener 状态估值器和稳态 Kalman 估值器. 它们可统一处理最优滤波、平滑和预报问题. 它们避免了求解 Diophantine 方程和 Riccati 方程, 因而构成了 Wiener 滤波和 Kalman 滤波新方法. 两个仿真例子说明了新方法的有效性.

关键词: 广义系统; 广义 Wiener 状态滤波器; 广义 Kalman 滤波器; 现代时间序列分析方法

New Approaches to Wiener Filtering and Kalman Filtering for Descriptor Systems

Deng Zili and Xu Yan

(Institute of Applied mathematics, Heilongjiang University · Harbin, 150080, P. R. China)

Abstract: Using the modern time series analysis method in the time domain, based on the autoregressive moving average (ARMA) innovation model and white noise estimation theory, Wiener state estimators and steady-state Kalman estimators are presented for descriptor systems. They can handle the optimal filtering, smoothing and prediction problems in unified frameworks. They avoid the solution of the Diophantine equations and Riccati equations, and constitute new approaches to Wiener filtering and Kalman filtering. Two simulation examples show the usefulness of the new approaches.

Key words: descriptor systems; descriptor Wiener state estimators; descriptor Kalman filter; modern time series analysis method

1 引言(Introduction)

广义系统广泛出现在电网络、经济系统、机器人等领域, 近年来尤为人们所关注, 文献[1]用频域上的 Wiener 滤波方法(多项式方法)提出了非广义系统 Wiener 状态滤波器. 其缺点是要求解 Diophantine 方程, 且不能处理广义系统. 文献[2]用经典 Kalman 滤波方法提出了一种广义稳态 Kalman 预报器. 其缺点是要求解 Riccati 方程, 且不能统一处理滤波、平滑和预报问题. 文献[3, 4]给出了广义非递推状态估值器. 文献[5]提出了一种广义稳态 Kalman 预报器. 其局限性是不能统一处理滤波、平滑和预报问题, 且不能处理带相关噪声系统. 为了克服上述缺点和局限性, 本文用时域上的现代时间序列分析方法^[6], 基于 ARMA 新息模型提出了广义系统的 Wiener 状态估值器和稳态 Kalman 估值器, 可统一处理滤波、平滑和预报问题, 且避免了求解 Diophantine 方程和 Riccati 方程, 构成了 Wiener 滤波和 Kalman 滤波新方法.

考虑广义离散随机线性系统

$$Mx(t+1) = \Phi x(t) + \Gamma w(t), \quad (1)$$

$$y(t) = Hx(t) + v(t). \quad (2)$$

其中状态 $x(t) \in \mathbb{R}^n$, 观测 $y(t) \in \mathbb{R}^m$, M, Φ, Γ, H 为常阵.

假设 1 M 是奇异方阵.

假设 2 对任意复数 z , $\det(zM - \Phi) \neq 0$.

假设 3 $w(t) \in \mathbb{R}^r$ 和 $v(t)$ 是零均值相关白噪声:

$$E\left\{\begin{bmatrix} w(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{(j)}^T & v_{(j)}^T \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} Q_w & S \\ S^T & Q_v \end{bmatrix} \delta_{ij}, \begin{bmatrix} Q_w & S \\ S^T & Q_v \end{bmatrix} > 0. \quad (3)$$

其中 E 为数学期望, T 为转置号, $\delta_{ii} = 1, \delta_{ij} = 0 (i \neq j)$.

假设 4 系统完全可观: 对任意复数 z ,

$$\text{rank} \begin{bmatrix} zM - \Phi \\ H \end{bmatrix} = n, \text{rank} \begin{bmatrix} M \\ H \end{bmatrix} = n. \quad (4)$$

问题是基于观测 $(y(t+N), y(t+N-1), \dots)$

^{*} 国家自然科学基金(69774019)资助项目.

本文于 1997 年 12 月 2 日收到. 1998 年 8 月 26 日收到修改稿.

求状态 $x(t)$ 的可实现的显式 Wiener 状态估值器 $\hat{x}(t|t+N)$, 它具有以 $y(t+N)$ 作为输入的有理传递函数阵表达式; 并求广义稳态 Kalman 估值器 $\hat{x}(t|t+N)$, 它具有类似于经典 Kalman 滤波器的结构. 对 $N=0, N>0$ 或 $N<0$, 分别称其为广义 Wiener 或 Kalman 滤波器、平滑器或预报器.

2 ARMA 新息模型和引理 (The ARMA innovation model and Lemmas)

由式(1)和式(2)有

$$y(t) = H(M - q^{-1}\Phi)^{-1}\Gamma q^{-1}w(t) + v(t). \quad (5)$$

其中 q^{-1} 为单位滞后算子. 引入左素分解

$$H(M - q^{-1}\Phi)^{-1}\Gamma q^{-1} = A^{-1}Cq^\tau. \quad (6)$$

其中 A, C 为形如 $X = X(q^{-1}) = X_0 + X_1q^{-1} + \dots + X_nq^{-n}$ 的多项式矩阵, X_i 为系数阵, $n_x = \deg(X)$ 为阶次, q 为单位前进算子. $A_0 = I_m, C_0 \neq 0, \tau$ 为整数, I_m 为 $m \times m$ 单位阵, 将式(6)代入式(5)有 ARMA 新息模型

$$Ay(t) = D\epsilon(t), \quad (7)$$

其中 D 是稳定的 (即 $\det D(x)$ 的零点在单位圆外), $D_0 = I_m$, 新息 $\epsilon(t) \in \mathbb{R}^m$ 是零均值, 方差阵为 Q_ϵ 的白噪声, 且由假设 3 和 (A, C) 左素有关系

$$D\epsilon(t) = Cq^\tau w(t) + Av(t), \quad (8)$$

D 和 Q_ϵ 可用 Gevers 和 Wouters^[7] 算法求得.

引理 1^[8] 式(4)引出如下矩阵 Θ 为列满秩:

$$\Theta = \begin{bmatrix} M & -\Phi & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & M & -\Phi \\ H & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & H \end{bmatrix} \begin{cases} (\beta-1)n \\ \beta m \end{cases} \quad (9)$$

其中 β 叫可观测性指数, 它是使 Θ 为列满秩的最小自然数.

引理 2^[9] 对任意整数 i, j, t 有

$$\begin{cases} E[w(t)\epsilon^T(j)] = \Pi_{j-t}, \\ E[v(t)\epsilon^T(j)] = \Lambda_{j-t}, \\ E[y(t)\epsilon^T(j)] = R_{t-j}Q_\epsilon, \\ \Pi_i = Q_w F_{i+(\tau \vee 0)}^T + S G_{i+(\tau \vee 0)}^T, \\ \Lambda_i = Q_v G_{i+(\tau \vee 0)}^T + S^T F_{i+(\tau \vee 0)}^T. \end{cases} \quad (10)$$

其中定义 $(a \vee b) = \max(a, b), (a \wedge b) = \min(a, b)$. F_i, G_i, R_i 可递推计算为

$$\begin{cases} F_i = -D_1 F_{i-1} - \dots - D_{n_d} F_{i-n_d} + \bar{C}_i, \\ F_i = 0 (i < 0), \bar{C}_i = 0 (i > n_\epsilon), \\ G_i = -D_1 G_{i-1} - \dots - D_{n_d} G_{i-n_d} + \bar{A}_i, \\ G_i = 0 (i < 0), \bar{A}_i = 0 (i > n_a), \\ R_i = -A_1 R_{i-1} - \dots - A_{n_a} R_{i-n_a} + D_i, \\ R_i = 0 (i < 0); D_i = 0 (i > n_d). \end{cases} \quad (11)$$

其中定义 $\bar{C} = Cq^{(\tau \wedge 0)}, \bar{A} = Aq^{(-\tau \wedge 0)}$.

证 由式(8)和文献[9]的公式得证.

引理 3^[9] 最优白噪声估值器为

$$\begin{aligned} \hat{w}(t|t+N) &= L_N \epsilon(t+N), \\ \hat{v}(t|t+N) &= M_N \epsilon(t+N). \end{aligned} \quad (12)$$

其中多项式矩阵 $L_N, M_N, F_N(q)$ 和 $G_N(q)$ 定义为

$$\begin{cases} L_N = [Q_w F_N^T(q) + S G_N^T(q)] Q_\epsilon^{-1} q^{-N}, \\ M_N = [Q_v G_N^T(q) + S^T F_N^T(q)] Q_\epsilon^{-1} q^{-N}; \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} F_N(q) = \sum_{i=(-\tau \wedge 0)}^N F_{i+(\tau \vee 0)} q^i, \\ G_N(q) = \sum_{i=(-\tau \wedge 0)}^N G_{i+(\tau \vee 0)} q^i. \end{cases} \quad (14)$$

引理 4^[10] 对 $y(t+i)$ 的 Astrom 最优预报器为

$$\hat{y}(t+i|t) = J_i \tilde{D}^{-1} y(t). \quad (15)$$

其中 $\tilde{A}, \tilde{D}$ 由如下右素分解决定

$$D^{-1}A = \tilde{A}\tilde{D}^{-1}. \quad (16)$$

带 $\tilde{D}_0 = I_m, \tilde{A}_0 = I_m, n_a = n_{\tilde{a}}, n_d = n_{\tilde{d}}$, 且 J_i 由下式决定

$$\tilde{D} = E_i \tilde{A} + q^{-i} J_i (i > 0); J_i = \tilde{D} q^i (i \leq 0). \quad (17)$$

其中 $\deg(E_i) = i-1, \deg(J_i) = \max(n_a-1, n_d-i)$.

引理 5^[6] 最优预报器 $\hat{y}(t+i|t)$ 可递推计算为

$$A(\tilde{q}^{-1})\hat{y}(t+j|t) = D\epsilon(t+j), j = 1, \dots, i. \quad (18)$$

其中规定 $\epsilon(t+j) = 0 (j > 0), \hat{y}(i|j) = y(i) (i \leq j), A(\tilde{q}^{-1})$ 是只对 $(t+j)$ 运算的 $A(q^{-1})$.

引理 6^[11] 若 $\text{rank}[M^T, H^T]^T = n$, 则存在矩阵 T_0 使 $(M + T_0 H)$ 非异.

3 广义 Wiener 状态估值器 (Descriptor Wiener state estimators)

定理 1 广义系统(1), (2)在假设 1~4 下, 有渐近稳定的 Wiener 状态估值器为

$$\hat{x}(t|t+N) = \bar{D}_N^{-1} \bar{K}_{NY}(t+N), \quad (19)$$

或等价地有 ARMA 递推滤波器

$$\bar{D}_N \hat{x}(t | t + N) = \bar{K}_N y(t + N). \quad (20)$$

其传递函数阵 $\bar{D}_N^{-1} \bar{K}_N$ 由如下左素分解决定:

$$\bar{D}_N^{-1} \bar{K}_N = K_N \tilde{D}^{-1}. \quad (21)$$

其中 $\tilde{D}, \tilde{A}$ 由式(16)决定, 多项式矩阵 K_N 定义为

$$K_N = \sum_{i=1}^{\beta-1} \Theta_i^{(1)} \Gamma L_{N+i} \tilde{A} + \sum_{i=0}^{\beta-1} \Theta_i^{(2)} [J_{-i-N} - M_{N+i} \tilde{A}]. \quad (22)$$

其中 L_i, M_i, J_i 由式(13), (17)决定, 且将由式(9)定义的矩阵 Θ 的伪逆 $\Theta^\#$ 分块表示为

$$\Theta^\# = (\Theta^T \Theta)^{-1} \Theta^T = \begin{bmatrix} \Theta_1^{(1)} \cdots \Theta_{\beta-1}^{(1)} & \Theta_0^{(2)} \cdots \Theta_{\beta-1}^{(2)} \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}. \quad (23)$$

其中 $\Theta_i^{(1)}$ 和 $\Theta_i^{(2)}$ 分别为 $n \times n$ 和 $n \times m$ 阵.

证 由式(1), (2)和 Θ 的定义式(9)有关系

$$\Theta \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-1) \\ \vdots \\ x(t-\beta+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma w(t-1) \\ \vdots \\ \Gamma w(t-\beta+1) \\ y(t) - v(t) \\ \vdots \\ y(t-\beta+1) - v(t-\beta+1) \end{bmatrix}, \quad (24)$$

因 Θ 为列满秩, 则伪逆 $\Theta^\# = (\Theta^T \Theta)^{-1} \Theta^T$. 由式(23), (24)有

$$x(t) = \sum_{i=1}^{\beta-1} \Theta_i^{(1)} \Gamma w(t-i) + \sum_{i=0}^{\beta-1} \Theta_i^{(2)} [y(t-i) - v(t-i)]. \quad (25)$$

对上式取射影运算有非递推最优状态估值器

$$\hat{x}(t | t + N) = \sum_{i=1}^{\beta-1} \Theta_i^{(1)} \Gamma \hat{w}(t-i | t + N) + \sum_{i=0}^{\beta-1} \Theta_i^{(2)} [\hat{y}(t-i | t + N) - \hat{v}(t-i | t + N)]. \quad (26)$$

由式(7)有 $\varepsilon(t + N) = D^{-1} A y(t + N)$, 代入式(12)并由式(16)有

$$\begin{aligned} \hat{w}(t | t + N) &= L_N \tilde{A} \tilde{D}^{-1} y(t + N), \\ \hat{v}(t | t + N) &= M_N \tilde{A} \tilde{D}^{-1} y(t + N). \end{aligned} \quad (27)$$

将式(15), (27)代入式(26)引出

$$\hat{x}(t | t + N) = K_N \tilde{D}^{-1} y(t + N). \quad (28)$$

其中 K_N 由式(22)定义. 再由式(21)引出式(19)和式(20). 由 D 是稳定的和式(16)引出 $\tilde{D}$ 稳定, 进而由式(21)引出 $\bar{D}_N$ 稳定, 故式(19)或式(20)是渐近

稳定的.

推论 1 对单输出(SO)广义系统($m = 1$), 有 Wiener 状态估值器为

$$D \hat{x}(t | t + N) = K_N y(t + N), \quad (29)$$

$$K_N = \sum_{i=1}^{n-1} \Theta_i^{(1)} \Gamma L_{N+i} A + \sum_{i=0}^{n-1} \Theta_i^{(2)} [J_{-i-N} - M_{N+i} A]. \quad (30)$$

其中 A, D 由式(7)定义.

证 注意 $\tilde{A} = A, \tilde{D} = D, n = \beta$, 由式(20), 式(22)得证.

推论 2 定理 1 适用于非广义系统($M = I_n$).

注意, 由式(28)有 Wiener 状态估值器的另一形式

$$\det \tilde{D} \hat{x}(t | t + N) = K_N \text{adj} \tilde{D} y(t + N). \quad (31)$$

4 广义稳态 Kalman 估值器 (Descriptor steady-state Kalman estimators)

由假设 4 和引理 6, 存在 T_0 使 $(M + T_0 H)$ 非奇异. 用 T_0 左乘式(2)后再与式(1)相加, 则有非广义系统

$$x(t) = \Psi x(t-1) + B y(t) - B v(t) + L w(t-1), \quad (32)$$

$$y(t) = H x(t) + v(t). \quad (33)$$

其中矩阵 Ψ, B, L 定义为

$$\begin{cases} \Psi = (M + T_0 H)^{-1} \Phi, \\ B = (M + T_0 H)^{-1} T_0, \\ L = (M + T_0 H)^{-1} \Gamma. \end{cases} \quad (34)$$

假设 4 引出 (Ψ, H) 为可观对^[5], 即

$$\text{rank} \Omega = n; \quad \Omega = [H^T, (H\Psi)^T, \dots, (H\Psi^{\beta-1})^T]^T. \quad (35)$$

将伪逆 $\Omega^\#$ 分块表示为

$$\Omega^\# = (\Omega^T \Omega)^{-1} \Omega^T = [\Omega_0 \Omega_1 \cdots \Omega_{\beta-1}]. \quad (36)$$

其中 Ω_i 为 $n \times m$ 阵, 由式(32), 式(33)迭代 $x(t)$ 可表为

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\beta-1} \Omega_i \left\{ y(t+i) - \sum_{j=0}^{i-1} H \Psi^{i-1-j} [B y(t+j+1) - B v(t+j+1) + L w(t+j)] - v(t+i) \right\}. \quad (37)$$

其中规定 $\Psi^i = 0 (i < 0), j \geq 0$.

定理 2 广义系统(1), (2)在假设 1~4 下, 有广义稳态 Kalman 估值器为

$$\begin{aligned} \hat{x}(t | t + N) &= \\ &\Psi \hat{x}(t-1 | t-1 + N) + B \hat{y}(t | t-1 + N) - \\ &B \hat{v}(t | t-1 + N) + L \hat{w}(t-1 | t-1 + N) + \\ &K_N \varepsilon(t + N). \end{aligned} \quad (38)$$

其中稳态 Kalman 估值器增益阵 K_N 有公式

$$K_N = \sum_{i=0}^{\beta-1} \Omega_i \{ R_{i-N} Q_\varepsilon - \sum_{j=0}^{i-1} H \Psi^{i-1-j} [B R_{j+1-N} Q_\varepsilon - B \Lambda_{N-j-1} + L H_{N-j}] - \Lambda_{N-i} \} Q_\varepsilon^{-1}. \quad (39)$$

其中 Λ_i, Π_i, R_i 由式(10), (11)计算.

证 由射影公式^[6]和式(32)有

$$\hat{x}(t | t + N) = \hat{x}(t | t + N - 1) + K_N \varepsilon(t + N), \quad (40)$$

$$K_N = E[x(t) \varepsilon^T(t + N)] Q_\varepsilon^{-1}, \quad (41)$$

$$\hat{x}(t | t + N - 1) =$$

$$\Psi \hat{x}(t - 1 | t - 1 + N) + B \hat{y}(t | t - 1 + N) - B \hat{\theta}(t | t - 1 + N) + L \hat{\lambda}(t - 1 | t - 1 + N). \quad (42)$$

将式(42)代入式(40)得式(38). 将式(37)代入式(41)并用式(10)得式(39).

推论 3 定理 2 适用于非广义系统 ($M = I_n$).

证 注意 $M = I_n, \tau < 0$, 取 $T_0 = 0$, 有 $\Psi = \Phi, B = 0, L = \Gamma$.

注意, 广义 Kalman 估值器(38)的计算与初始估值 $\hat{x}(t_0 | t_0 + N)$ 和新息 $\varepsilon(t)$ 的初值两者有关. 新息可由式(7)取初值 ($\varepsilon(0), \dots, \varepsilon(n_d - 1)$) 递推计算为

$$\varepsilon(t) = A y(t) - D_1 \varepsilon(t - 1) - \dots - D_{n_d} \varepsilon(t - n_d), \quad t = n_d, n_d + 1, \dots \quad (43)$$

可证明: 若 Ψ 是稳定矩阵, 则 $\hat{x}(t | t + N)$ 关于这两种初值是渐近稳定的, 即 $\hat{x}(t | t + N)$ 的值渐近地与这两种初值选取无关. 因而在计算中可任意设置这两种初值, 若 Ψ 是不稳定矩阵, 则这种稳定性不成立. 但可适当选取初值 $\hat{x}(t_0 | t_0 + N)$ 使 $\hat{x}(t | t + N)$ 关于新息初值是渐近稳定的.

定理 3 在定理 2 条件下, 若 Ψ 是不稳定矩阵, 如选择初始估值

$$\hat{x}(t_0 | t_0 + N) =$$

$$\sum_{i=0}^{\beta-1} \Omega_i \{ \hat{y}(t_0 + i | t_0 + N) - \sum_{j=0}^{i-1} H \Psi^{i-1-j} [B \hat{y}(t_0 + 1 + j | t_0 + N) - B \hat{\theta}(t_0 + 1 + j | t_0 + N) + L \hat{\lambda}(t_0 + j | t_0 + N)] - \hat{\theta}(t_0 + i | t_0 + N) \}, \quad (44)$$

则 $\hat{x}(t | t + N)$ 关于新息初值是渐近稳定的.

证 类似于文献[12], 从略.

5 仿真例子 (Simulation examples)

例 1 考虑广义系统

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t+1) = \begin{bmatrix} 0.2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w(t), \quad (45)$$

$$y(t) = I_2 x(t) + v(t). \quad (46)$$

其中 $x(t) = [x_1(t), x_2(t)]^T, w(t)$ 和 $v(t)$ 是零均值独立高斯白噪声, 方差各为 $\sigma_w^2 = 1, Q_v = \text{diag}(1, 1)$. 取 $N = -1$, 求 Wiener 状态预报器 $\hat{x}(t | t - 1)$.

易得 ARMA 新息模型为

$$(1 - 0.8q^{-1})y(t) = (I_2 + D_1 q^{-1})\varepsilon(t). \quad (47)$$

其中用 Gevers 和 Wouters^[7]算法可求得

$$D_1 = \begin{bmatrix} -0.349 & -0.09 \\ -0.09 & -0.782 \end{bmatrix}, Q_\varepsilon = \begin{bmatrix} 2.361 & -0.272 \\ -0.272 & 1.054 \end{bmatrix}. \quad (48)$$

可求得

$$\bar{D}_{-1} = I_2 + \begin{bmatrix} -0.346 & -0.071 \\ -0.092 & -0.789 \end{bmatrix} q^{-1}, \quad (49)$$

$$\bar{K}_{-1} = \begin{bmatrix} 0.451 & -0.09 \\ -0.09 & 0.018 \end{bmatrix}.$$

于是由定理 1 有广义 Wiener 状态预报器为

$$\bar{D}_{-1} \hat{x}(t | t - 1) = \bar{K}_{-1} y(t - 1). \quad (50)$$

仿真结果如图 1 和图 2 所示.

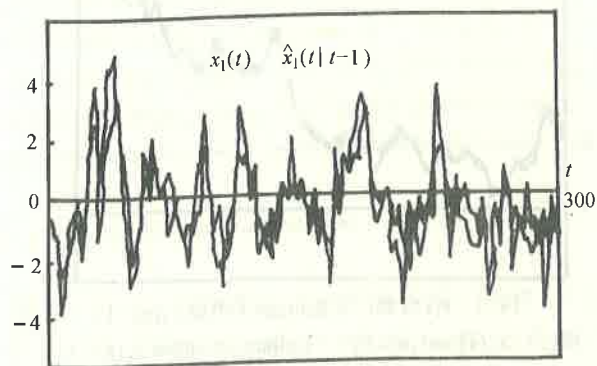


图 1 $x_1(t)$ 和 Wiener 预报器 $\hat{x}_1(t|t-1)$

Fig. 1 $x_1(t)$ and Wiener predictor $\hat{x}_1(t|t-1)$

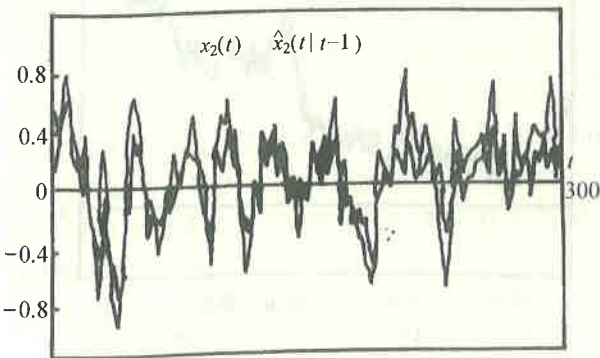


图 2 $x_2(t)$ 和 Wiener 预报器 $\hat{x}_2(t|t-1)$

Fig. 2 $x_2(t)$ and Wiener predictor $\hat{x}_2(t|t-1)$

例 2 考虑广义系统

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} w(t), \quad (51)$$

$$y(t) = [1 \quad 1]x(t) + v(t), \quad v(t) = 0.5w(t) + \xi(t). \quad (52)$$

其中 $w(t)$ 和 $\xi(t)$ 是零均值, 方差为 $\sigma_w^2 = 1$ 和 $\sigma_\xi^2 = 8$ 的独立高斯白噪声. 取 $N = 1$, 求 Kalman 平滑器 $\hat{x}(t|t+1)$.

容易求得 ARMA 新息模型为

$$(1 - q^{-1})y(t) = (1 - 0.524q^{-1})\epsilon(t). \quad (53)$$

其中新息 $\epsilon(t)$ 的方差 $\sigma_\epsilon^2 = 17.653$. 取 $T_0 = [1 \quad 0]^T$, 可得

$$\Psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (54)$$

由定理 2 可求得稳态 Kalman 平滑器增益 K_1 为

$$K_1 = [0.051, 0.142]^T. \quad (55)$$

因 Ψ 是不稳定矩阵, 由定理 3 可得初值

$$\hat{x}(0|1) = [0.729, 2.054]^T. \quad (56)$$

仿真结果如图 3 和图 4 所示.

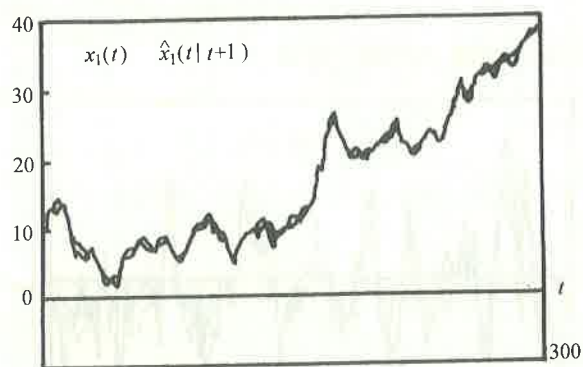


图 3 $x_1(t)$ 和广义 Kalman 平滑器 $\hat{x}_1(t|t+1)$

Fig. 3 $x_1(t)$ and descriptor Kalman smoother $\hat{x}_1(t|t+1)$

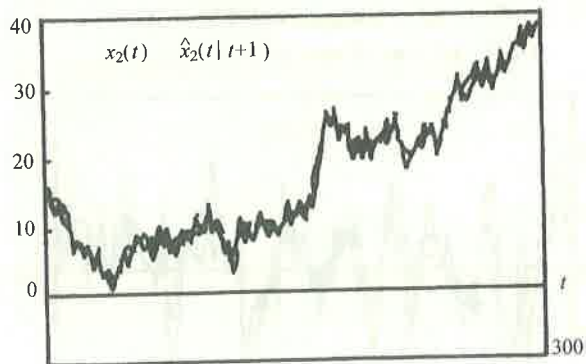


图 4 $x_2(t)$ 和广义 Kalman 平滑器 $\hat{x}_2(t|t+1)$

Fig. 4 $x_2(t)$ and descriptor Kalman smoother $\hat{x}_2(t|t+1)$

6 结论 (Conclusion)

本文分别提出了广义系统 Wiener 滤波和 Kalm-

an 滤波新方法. 两种新方法的共同原理是: 利用系统可观性可获得由白噪声和观测的线性组合表示的非递推状态表达式, 进而基于 ARMA 新息模型和白噪声估值器, 引出 Wiener 状态估值器和稳态 Kalman 估值器, 新方法避免了求解 Diophantine 方程和 Riccati 方程, 算法简单. 两种新方法相比较, Wiener 状态估值器在计算上有优点: 避免了初始状态估值的计算.

参考文献 (References)

- 1 Grimble M J. H_2 inferential filtering, prediction, and smoothing with application to rolling mill gauge estimation. *IEEE Trans. Signal Processing*, 1994, 42(8): 2079 - 2093
- 2 Nikoukhah K, Willsky A S and Bernad B C. Kalman filtering and Riccati equations for descriptor systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1992, 37(9): 1325 - 1341
- 3 张焕水, 邓自立. 广义离散随机线性系统自校正最优预报器. *自动化学报*, 1996, 22(1): 49 - 57
- 4 张焕水, 柴天佑. 广义离散随机线性系统最优滤波、预报和平滑估计的统一格式. *控制理论与应用*, 1997, 14(5): 722 - 726
- 5 张焕水, 柴天佑. 广义离散随机线性系统最优递推预报方法及其渐近稳定性. *自动化学报*, 1997, 23(2): 187 - 194
- 6 邓自立, 郭一新. *现代时间序列分析及其应用*. 北京: 知识出版社, 1989
- 7 Gevers M and Wouters W R E. An innovations approach to discrete-time stochastic realization problem. *Journal A*, 1978, 19(2): 90 - 110
- 8 Darouach M, Zasadzinski M and Mehdi D. State estimation of stochastic singular linear systems. *Int. J. Syst. Sci.*, 1993, 24(2): 345 - 354
- 9 Deng Z L, Zhang H S, Liu S J. and Zhou L. Optimal and self-tuning white noise estimators with applications to deconvolution and filtering problems. *Automatica*, 1996, 32(2): 199 - 216
- 10 奥斯特隆姆, K J. *随机控制理论导论*. 北京: 科学出版社, 1983
- 11 王跃云, 金钟骥, 张钟俊. 广义系统反馈控制与极点配置方法. *自动化学报*, 1988, 14(4): 285 - 288
- 12 邓自立, 刘玉梅. 一类稳态 Kalman 滤波器及其渐近稳定性. *信息与控制*, 1998, 27(1): 27 - 31

本文作者简介

邓自立 1938 年生. 1962 年毕业于黑龙江大学数学系. 现为黑龙江大学应用数学研究所教授. 主要研究领域为状态估计, 最优滤波, 信号处理, 反卷积等. 发表论文 150 余篇.

许燕女. 1965 年生. 1989 年毕业于北京师范大学数学系, 1998 年获工学硕士学位. 现为黑龙江大学副教授. 研究方向为广义系统状态估计.