不确定离散系统的最优保性能控制*

俞　立
（浙江工业大学信息工程学院·杭州，310032）

摘要：对一类具有范数有界时变参数不确定性的离散时间线性系统和一个二次型性能指标，研究其最优保性能状态反馈控制律的设计问题．通过采用线性矩阵不等式方法，导出了存在保性能控制律的一个充分必要条件，进而，证明了该条件等价于一个线性矩阵不等式的可解性问题，并用这组线性矩阵不等式的可行解给出了保性能控制律的一个参数化表示．在此基础上，通过建立并求解一个凸优化问题，给出了最优保性能控制律的设计方法．

关键词：离散系统；不确定性；保性能控制；线性矩阵不等式

Optimal Guaranteed Cost Control for Uncertain Discrete-Time Linear Systems

Yu Li
(College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology·Hangzhou, 310032, P.R.China)

Abstract: For a class of discrete-time linear systems with norm-bounded time-varying parameter uncertainty and a quadratic cost index, the problem of designing an optimal guaranteed cost state feedback controller is considered in this paper. A necessary and sufficient condition for the existence of guaranteed cost controllers is derived. Furthermore, it is shown that this condition is equivalent to the solvability problem of a system of linear matrix inequalities, and its solutions provide a parametrized representation of guaranteed cost controllers. Based on that, the design problem of the optimal guaranteed cost controller is formulated as a convex optimization problem, which can be solved by the existing convex optimization techniques. Finally, an example is given to illustrate the proposed results.

Key words: discrete-time systems; uncertainties; guaranteed cost control; linear matrix inequalities

1　引言(Introduction)

具有范数有界时变参数不确定性系统的鲁棒镇定问题已得到了广泛的研究，取得了许多有意义的结果．但是，对一个实际控制系统，仅仅具有稳定性是不够的，还必须考虑其它的一些性能．线性二次型最优控制理论揭示了一个适当的二次型性能指标能反映系统的许多性能要求，但线性二次型最优控制理论是建立在被控对象的一个精确数学模型上，其结果对模型参数不确定性的鲁棒性很差．为此，Chang和Peng[1]提出了不确定系统的保性能控制问题(guaranteed cost control)，其主要思想是对具有参数不确定性的系统，设计一个控制律，不仅使得闭环系统稳定，而且使得闭环系统的性能不超过某个确定的上界．但在很长一段时间里，该问题并没有得到很好的解决．

随着不确定系统鲁棒控制问题研究的深入，不确定系统的保性能控制问题再次受到了关注，并相继取得了一些研究成果[2~4]．然而，目前，这方面的研究大多局限于连续系统．文献[5]研究了一类不确定离散系统的保性能控制问题，导出了保性能控制律存在的条件，通过将保性能控制问题转化为一个辅助线性时不变系统的 H_∞ 控制问题，采用 H_∞ 控制技术给出了保性能控制律的设计方法．但其仍然存在以下问题：保性能控制律存在的条件仅仅是充分的；不能确定使得闭环不确定系统性能指标值的上界尽可能小的最优保性能控制律．本文针对这两个存在的问题，给出了有效的解决方法．

2　问题的描述和准备(Problem statement and preparation)

考虑由以下状态方程描述的不确定离散系统

$$x_{k+1} = (A + \Delta A)x_k + (B + \Delta B)u_k. \qquad (1)$$

其中 $x_k \in \mathbb{R}^n$ 和 $u_k \in \mathbb{R}^m$ 分别是系统(1)的状态和

* 教育部优秀年轻教师基金和浙江省自然科学基金(697051)资助项目．
本文于1997年10月17日收到．1998年12月14日收到修改稿．

控制向量,A 和 B 是适当维数的常数矩阵,ΔA 和 ΔB 是适当维数的不确定矩阵,并假定具有以下的形式:

$$[\Delta A \quad \Delta B] = DF[E_1 \quad E_2]. \tag{2}$$

其中 D, E_1 和 E_2 是适当维数的常数矩阵,它们反映了不确定性的结构,$F \in \mathbb{R}^{i\times j}$ 是满足

$$F^{\mathrm{T}}F \leqslant I \tag{3}$$

的未知矩阵,上式中的 I 表示适当维数的单位矩阵.

对系统(1),定义一个性能指标

$$J = \sum_{k=0}^{\infty}[x_k^{\mathrm{T}}Qx_k + u_k^{\mathrm{T}}Ru_k]. \tag{4}$$

其中 $Q > 0, R > 0$ 是给定的加权矩阵.

定义 1 对系统(1)和性能指标(4),若存在一个矩阵 $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 和一个正定对称矩阵 $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$,使得对所有非零的 $x_k \in \mathbb{R}^n$ 和所有满足(3)式的 F,

$$x_k^{\mathrm{T}}[A + BK + DF(E_1 + E_2K)]^{\mathrm{T}}P[A + BK + DF(E_1 + E_2K)]x_k - x_k^{\mathrm{T}}Px_k + x_k^{\mathrm{T}}(Q + K^{\mathrm{T}}RK)x_k < 0, \tag{5}$$

则控制律 $u_k = Kx_k$ 称为是系统(1)的一个具有性能矩阵 P 的保性能控制律.

保性能控制和二次镇定[6]以及和闭环性能指标值之间的关系由以下引理揭示.

引理 1[5] 若 $u_k = Kx_k$ 是系统(1)和性能指标(4)的一个具有性能矩阵 $P > 0$ 的保性能控制律,则对所有允许的不确定性,闭环系统

$$x_{k+1} = [A + BK + DF(E_1 + E_2K)]x_k \tag{6}$$

是二次稳定的,且相应的闭环性能指标值满足

$$J \leqslant x_0^{\mathrm{T}}Px_0. \tag{7}$$

其中 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 是系统(1)的初始状态.

注 1 引理1中所得到的闭环性能指标的界依赖于初始状态 x_0,然而,在实际系统中,人们往往难以精确确定系统的初始状态.为克服这个困难,假定 x_0 是一个满足 $\mathrm{E}\{x_0x_0^{\mathrm{T}}\} = I$ 的零均值随机变量,此时,闭环系统性能指标的期望值

$$\bar{J} = \mathrm{E}\{J\} \leqslant \mathrm{E}\{x_0^{\mathrm{T}}Px_0\} = \mathrm{tr}(P). \tag{8}$$

$J^* = \mathrm{tr}(P)$ 称为是闭环系统的保性能(guaranteed cost).

本文的目的是对不确定离散系统(1)和性能指标(4),给出保性能控制律的存在条件和设计方法,并进一步探讨使得闭环系统的保性能最小化的最优保性能控制律的设计问题.

3 保性能控制律存在的条件(Conditions for the existence of guaranteed cost controllers)

引理 2 设 A 是任一方阵,则存在矩阵 $P > 0$,使得 $A^{\mathrm{T}}PA - P + T < 0$ 当且仅当存在矩阵 $X > 0$,使得

$$\begin{bmatrix} -X & AX \\ XA^{\mathrm{T}} & -X + XTX \end{bmatrix} < 0. \tag{9}$$

证 由矩阵的 Schur 补性质,存在矩阵 $P > 0$,使得 $A^{\mathrm{T}}PA - P + T < 0$ 当且仅当

$$\begin{bmatrix} -P^{-1} & A \\ A^{\mathrm{T}} & -P + T \end{bmatrix} < 0. \tag{10}$$

对上式左边的矩阵分别左乘和右乘矩阵

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{bmatrix},$$

可得(10)式等价于

$$\begin{bmatrix} -P^{-1} & AP^{-1} \\ P^{-1}A^{\mathrm{T}} & -P^{-1} + P^{-1}TP^{-1} \end{bmatrix} < 0.$$

取 $X = P^{-1}$,即得引理之结论.

引理 3[7] 给定适当维数的矩阵 Y, H 和 E,其中 Y 是对称的,则

$$Y + HFE + E^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}} < 0.$$

对所有满足 $F^{\mathrm{T}}F \leqslant I$ 的矩阵 F 成立当且仅当存在一个常数 $\varepsilon > 0$,使得

$$Y + \varepsilon HH^{\mathrm{T}} + \varepsilon^{-1}E^{\mathrm{T}}E < 0.$$

以下的定理给出了系统(1)存在保性能控制律的一个充分必要条件.

定理 1 不确定离散系统(1)存在一个保性能控制律 $u_k = Kx_k$ 当且仅当存在一个常数 $\varepsilon > 0$,一个矩阵 K 和一个对称矩阵 $X > 0$,使得

$$\begin{bmatrix} \varepsilon DD^{\mathrm{T}} - X & (A+BK)X & 0 \\ X(A+BK)^{\mathrm{T}} & -X+X(Q+K^{\mathrm{T}}RK)X & X(E_1+E_2K)^{\mathrm{T}} \\ 0 & (E_1+E_2K)X & -\varepsilon I \end{bmatrix} < 0. \tag{11}$$

证 根据定义1,系统(1)存在一个保性能控制律 $u_k = Kx_k$ 当且仅当存在矩阵 K 和一个对称矩阵 $P > 0$,使得

$$[A + BK + DF(E_1 + E_2K)]^{\mathrm{T}}P[A + BK + DF(E_1 + E_2K)] - P + Q + K^{\mathrm{T}}RK < 0.$$

由引理2,这等价于存在对称矩阵 $X > 0$,使得

$$\begin{bmatrix} -X & [A+BK+DF(E_1+E_2K)]X \\ X[A+BK+DF(E_1+E_2K)]^{\mathrm{T}} & -X+X(Q+K^{\mathrm{T}}RK)X \end{bmatrix} < 0. \tag{12}$$

定义矩阵

$$Y = \begin{bmatrix} -X & (A + BK)X \\ X(A + BK)^{\mathrm{T}} & -X + X(Q + K^{\mathrm{T}}RK)X \end{bmatrix},$$

则(12)式可以重新写成

$$Y + \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix} F[0 \quad (E_1 + E_2K)X] + [0 \quad (E_1 + E_2K)X]^{\mathrm{T}} F^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} < 0. \qquad (13)$$

取

$$H = \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix}, E = [0 \quad (E_1 + E_2K)X].$$

则从引理 3 可知:对所有满足 $F^{\mathrm{T}}F \leqslant I$ 的矩阵 F,矩阵不等式(13) 成立当且仅当存在一个常数 $\varepsilon > 0$,使得

$$Y + \varepsilon \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix} [D^{\mathrm{T}} \quad 0] + \varepsilon^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ X(E_1 + E_2K)^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} [0 \quad (E_1 + E_2K)X] < 0,$$

即

$$\begin{bmatrix} \varepsilon DD^{\mathrm{T}} - X & (A + BK)X \\ X(A + BK)^{\mathrm{T}} & V \end{bmatrix} < 0. \qquad (14)$$

其中

$$V = -X + X(Q + K^{\mathrm{T}}RK)X + \varepsilon^{-1}X(E_1 + E_2K)^{\mathrm{T}}(E_1 + E_2K)X.$$

由矩阵的 Schur 补性质,可进一步得到(14)式等价于矩阵不等式(11).定理得证.

注 2 根据以上定理,对满足矩阵不等式(11)的矩阵 K, X 和常数 $\varepsilon > 0$,保性能控制律 $u_k = Kx_k$ 的性能矩阵 $P = X^{-1}$,相应的闭环系统的保性能是 $J^* = \mathrm{tr}(X^{-1})$.

4 保性能控制律的设计(Design of guaranteed cost controllers)

基于保性能控制律的存在条件,以下定理给出了保性能控制律的设计方法.

定理 2 $u_k = Kx_k$ 是系统(1) 的保性能控制律当且仅当存在常数 $\varepsilon > 0$,矩阵 $W \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 和对称正定矩阵 $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$,使得

$$\begin{bmatrix} \varepsilon DD^{\mathrm{T}} - X & AX+BW & 0 & 0 & 0 \\ (AX+BW)^{\mathrm{T}} & -X & (E_1X+E_2W)^{\mathrm{T}} & X & W^{\mathrm{T}} \\ 0 & E_1X+E_2W & -\varepsilon I & 0 & 0 \\ 0 & X & 0 & -Q^{-1} & 0 \\ 0 & W & 0 & 0 & -R^{-1} \end{bmatrix} < 0. \qquad (15)$$

进而当矩阵不等式(15)有解 W 和 $X > 0$ 时,$u_k = WX^{-1}x_k$ 是系统(1) 的一个保性能控制律.

证　由矩阵的 Schur 补性质,(11)式等价于

$$\begin{bmatrix} \varepsilon DD^{\mathrm{T}} - X & (A+BK)X & 0 & 0 & 0 \\ X(A+BK)^{\mathrm{T}} & -X & X(E_1+E_2K)^{\mathrm{T}} & X & (KX)^{\mathrm{T}} \\ 0 & (E_1+E_2K)X & -\varepsilon I & 0 & 0 \\ 0 & X & 0 & -Q^{-1} & 0 \\ 0 & KX & 0 & 0 & -R^{-1} \end{bmatrix} < 0.$$

因此,在上式中取 $W = KX$,即得到矩阵不等式(15).定理得证.

不等式(15) 是关于变量 ε, W 和 X 的线性矩阵不等式[8],所有满足(15)式的(ε, W, X)构成一个凸集,因此,可以应用有关 LMI 的技术来判断该集是否非空.同时,定理 2 也给出了用线性矩阵不等式(15)的可行解来构造系统(1)的保性能控制律的方法.实际上,它还给出了所有保性能控制律的一个参数化表示.

由定理 2 和上一节的注 2 可以看出保性能控制律和其性能矩阵之间的关系.由此可以知道:不同的保性能控制律导出的闭环系统的保性能是不同的.显然,使得闭环系统保性能最小的保性能控制律是更有意义的,具有这样性质的保性能控制律称为是系统(1)的最优保性能控制律.

以下将利用定理 2 给出的保性能控制律的参数化表示来研究最优保性能控制律的设计问题.

定理 3 对给定的系统(1)和性能指标(4),如果以下的优化问题

$$\min_{\varepsilon, X, S, W} Z = \mathrm{tr}(S) \qquad (16)$$

$$\text{s.t.} \begin{bmatrix} \varepsilon DD^{\mathrm{T}} - X & AX + BW & 0 & 0 & 0 \\ (AX + BW)^{\mathrm{T}} & -X & (E_1X + E_2W)^{\mathrm{T}} & X & W^{\mathrm{T}} \\ 0 & E_1X + E_2W & -\varepsilon I & 0 & 0 \\ 0 & X & 0 & -Q^{-1} & 0 \\ 0 & W & 0 & 0 & -R^{-1} \end{bmatrix} < 0,$$

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & S \end{bmatrix} > 0,$$

有一个最优解 $(\tilde{\varepsilon},\tilde{S},\tilde{X},\tilde{W})$,则 $u_k=\tilde{W}\tilde{X}^{-1}x_k$ 是系统(1)的最优保性能控制律.相应的闭环系统的保性能 $J^*=\mathrm{tr}(\tilde{X}^{-1})$.

证 若$(\tilde{\varepsilon},\tilde{S},\tilde{X},\tilde{W})$是最优化问题(16)的一个解,则由于$(\tilde{\varepsilon},\tilde{X},\tilde{W})$是矩阵不等式(15)的一个可行解,故由定理2可知 $u_k=\tilde{W}\tilde{X}^{-1}x_k$ 是系统(1)的一个保性能控制律.另一方面,从优化问题(16)的第二个约束条件和矩阵的Schur补性质可得 $X^{-1}<S$.因此,$\mathrm{tr}(X^{-1})<\mathrm{tr}(S)$.从而,$\mathrm{tr}(S)$的最小化将保证$\mathrm{tr}(X^{-1})$的最小化.进一步由$\mathrm{tr}(S)$和约束条件的凸性可知优化问题(16)可以达到全局最优.因此,由$(\tilde{\varepsilon},\tilde{S},\tilde{X},\tilde{W})$是问题(16)的一个最优解可推出 $u_k=\tilde{W}\tilde{X}^{-1}x_k$ 是系统(1)的最优保性能控制律.定理得证.

问题(16)是一个具有线性矩阵不等式约束的凸优化问题,因此可以应用现有的有关求解凸优化问题的方法求解之.

5 示例(Illustrative example)

考虑不确定离散系统(1)和性能指标(4),其中

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1.5\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0.3\\ 0.5\end{bmatrix},$$

$$D=\begin{bmatrix}0.1 & 0\\ 0 & 0.1\end{bmatrix},\quad E_1=\begin{bmatrix}0.2 & 0.3\\ 0.1 & 0.4\end{bmatrix},$$

$$E_2=\begin{bmatrix}0.3\\ 0.1\end{bmatrix},\quad Q=\begin{bmatrix}0.5 & 0\\ 0 & 0.5\end{bmatrix},\quad R=1.$$

要求设计该系统的最优保性能控制律.

建立相应的优化问题(16),应用MATLAB软件中有关LMI工具包中的mincx命令,可得该优化问题有最优解,进而根据定理3,得到所考虑系统的最优保性能控制律

$$u_k=[-0.4302\quad 1.7989]x_k,$$

相应的闭环系统的保性能 $J^*=10.6892$.

文献[5]对这一例子采用Riccati方程方法得到的一个保性能控制律是

$$u_k=[-0.4109\quad 1.7955]x_k,$$

相应的闭环系统的保性能是 $J^*=11.022$.显然,采用本文的方法,可以进一步设计系统的最优保性能控制律,从而降低闭环系统性能指标的保性能值.

如果不考虑系统的不确定性,则相应的离散系统二次型最优控制问题的最优性能指标值是 $J^*=8.9183$.显然,系统不确定性的存在导致了性能的降低.本文的方法给出了这种性能衰减的一种定量度量.

6 结论(Conclusions)

本文对一类不确定离散线性系统和一个二次型性能指标,研究了其保性能控制问题.采用线性矩阵不等式处理方法,导出了系统存在保性能控制律的一个充分必要条件,进而用一个线性矩阵不等式的可行解给出了所有保性能控制律的一个参数化表示.在此基础上,通过建立和求解一个凸优化问题,给出了最优保性能控制律的设计方法.这种用线性矩阵不等式的可行解来刻划系统的保性能控制律的方法可进一步用来设计具有诸如反馈增益参数极小化,闭环极点位于给定区域等其他性能要求的保性能控制律.本文的结论也可以看成是离散二次型线性最优控制问题到具有模型参数不确定系统的推广.

参考文献(References)

1 Chang S S L and Peng T K C. Adaptive guaranteed cost control of systems with uncertain parameters. IEEE Trans. Automat. Contr.,1972,17(4):474–483

2 Kosmidou O I. Robust stability and performance of systems with structured and bounded uncertainties: an extension of the guaranteed cost control approach. Int. J. Control, 1990,52(3):627–640

3 Bernstein D S and Haddad W M. Robust stability and performance analysis for state-space systems via quadratic Lyapunov bounds. SIAM J. Matrix Anal.,1990,11(2):239–271

4 Petersen I R and McFarlane D C. Optimal guaranteed cost control and filtering for uncertain linear systems. IEEE Trans. Automat. Contr.,1994,39(9):1971–1977

5 Yu Li, Wang Jincheng and Chu Jian. Guaranteed cost control of uncertain linear discrete-time systems. Proceedings of American Control Conference, Albuquerque, New Mexico, 1997,5:3181–3184

6 Garcia G, Bernussou J and Arzelier D. Robust stabilization of discrete-time linear systems with norm-bounded time-varying uncertainty. Systems & Control Letters,1994,22(4):327–339

7 Xie L. Output feedback H_∞ control of systems with parameter uncertainty. Int.J. Control,1996,63(4):741–750

8 Boyd S, et al. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM,1994

本文作者简介

俞 立 见本刊1999年第1期第133页.