第16卷第5期
1999年10月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol.16, No.5
Oct., 1999

平面系统稳定性的间接方法 *

程代展　秦化淑
（中国科学院系统科学研究所系统控制开放实验室·北京，100080）

摘要：利用Routh判据得到的间接检验矩阵特征值的方法讨论平面系统的稳定性问题．对于线性系统，该方法给出平面区间矩阵稳定性的充要条件．对于非线性系统，基于Jacobian猜想的已知结果[5]，该方法给出平面非线性系统稳定吸引域估计的一种算法．最后，该估计被利用于高维系统二维滑动模的设计．

关键词：Routh判据；区间矩阵；Jacobian猜想；稳定吸引域；滑模控制

Indirect Method for Stability of Plane Systems

Cheng Daizhan　and　Qin Huashu
(Laboratory of Systems and Control, Institute of Systems Science, Chinese Academy of Sciences·Beijing, 100080, P. R. China)

Abstract: Using Routh criteria the paper investigates the problems of stability of plane systems via indirect verification of the eigenvalues of matrixes. For linear systems, the method provides necessary and sufficient conditions for the stability of plane interval matrixes. In nonlinear case, based on the results of [5] about the Jacobian conjecture, the method gives two algorithms for estimating the stability attraction region of plane systems. Finally, such estimations are used to design two dimensional sliding mode of higher degree control systems.

Key words: Routh criteria; interval matrixes; Jacobian conjecture; stability attraction region; sliding mode control

1　引言(Introduction)

给定一个 2×2 矩阵 A，称 A 为稳定的，如果 A 的特征值均有负实部．当系统具有不确定性时，或者说，考虑一个矩阵族时，直接检验其特征值是不方便的．利用Routh判据[1]我们可以得到如下等价条件：

引理1　A 是稳定矩阵的充要条件是：

i) $\det(A)>0$; ii) $\mathrm{tr}(A)<0$.

证　直接计算Routh阵即得，其第一列元素为：$1; -\mathrm{tr}(A); \det(A)$．由Routh判据即得引理1．

这个形式简单的引理，在应用上却十分方便，因为不管是区间矩阵问题或区域上的Jacobi矩阵问题，均要考虑矩阵集的稳定性．此时，直接考虑特征值甚不方便，而上述引理将此问题转化为连续函数问题，从而为解决这些问题提供了方便的工具．因此，这种间接方法对于判断不确定系统的稳定性问题特别有效．

2　平面区间矩阵稳定性的充要条件(Necessary and sufficient condition for the stability of plane systems)

一个区间矩阵定义为如下 $n\times n$ 矩阵集合[2]

$$I[P,Q]=\{X \mid p_{ij}\leqslant x_{ij}\leqslant q_{ij}, i,j=1,\cdots,n\}.$$

我们用 V 表示区间矩阵的顶点矩阵集，即

$$I[P,Q]\supset V=\{X\in I[P,Q] \mid x_{ij}=p_{ij}, 或\ q_{ij}\}.$$

显然，一个 $n\times n$ 区间矩阵有 $2^{n\times n}$ 个顶点矩阵．文献[2]曾断言，若一个区间矩阵的所有顶点矩阵均稳定，则区间矩阵稳定．即对任一 $X\in I[P,Q]$ 稳定．后来文献[3]给出反例，推翻了文献[2]的结论．此后，关于区间矩阵稳定性有许多讨论，例如见文献[4]．下面用间接方法证明文献[2]的结论对平面矩阵是正确的．

定理1　设 $I[P,Q]$ 为平面区间矩阵，其稳定的充要条件是：它的十六个顶点矩阵均稳定．

证　由引理1，我们只要证明，顶点的任一凸组合，均满足

$$\lambda_1 p_{11}+(1-\lambda_1)q_{11}+\lambda_4 p_{22}+(1-\lambda_4)q_{22}<0, \tag{1}$$

$$\det\begin{bmatrix}\lambda_1 p_{11}+(1-\lambda_1)q_{11} & \lambda_2 p_{12}+(1-\lambda_2)q_{12}\\ \lambda_3 p_{21}+(1-\lambda_3)q_{21} & \lambda_4 p_{22}+(1-\lambda_4)q_{22}\end{bmatrix}>0. \tag{2}$$

这里 $0\leqslant\lambda_i\leqslant 1,\ i=1,2,3,4$.

先证明式(1)．因为 $p_{11}+p_{22}<0, q_{11}+p_{22}<0$，则有

$$\lambda_1(p_{11}+p_{22})\leqslant 0,\ (1-\lambda_1)(q_{11}+p_{22})\leqslant 0,$$

* 国家自然科学基金(G69774008)及国家攀登计划资助项目．
本文于1997年9月10日收到．1998年2月17日收到修改稿．

但它们不能同时为零,相加得:

$$\lambda_1 p_{11} + (1-\lambda_1) q_{11} + p_{22} < 0. \tag{3}$$

同理可得:

$$\lambda_1 p_{11} + (1-\lambda_1) q_{11} + q_{22} < 0. \tag{4}$$

用 λ_4 乘式(3) 加上 $(1-\lambda_4)$ 乘式(4) 即得式(1).

下面证明式(2). 记顶点 $v_{ij} = p_{ij}$ 或 q_{ij}. 因为

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 p_{11} + (1-\lambda_1) q_{11} & v_{12} \\ v_{12} & v_{22} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 p_{11} + (1-\lambda_1) q_{11} & v_{12} \\ \lambda_1 \lambda_{21} + (1-\lambda_1) v_{21} & v_{22} \end{vmatrix} =$$

$$\lambda_1 \begin{vmatrix} p_{11} & v_{12} \\ \lambda_{21} & v_{22} \end{vmatrix} + (1-\lambda_1) \begin{vmatrix} q_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{vmatrix} > 0,$$

记 $a(\lambda_1) = \lambda_1 p_{11} + (1-\lambda_1) q_{11}$, 则

$$\begin{vmatrix} a(\lambda_1) & v_{12} \\ v_{12} & v_{22} \end{vmatrix} > 0. \tag{5}$$

因为式(5)对任意一顶点 v_{12} 及任何 $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant 1$ 均成立,于是有类似于上述的拆项表达式:

$$\begin{vmatrix} a(\lambda_1) & \lambda_2 p_{12} + (1-\lambda_2) q_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{vmatrix} =$$

$$\lambda_2 \begin{vmatrix} a(\lambda_1) & p_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{vmatrix} + (1-\lambda_2) \begin{vmatrix} a(\lambda_1) & q_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{vmatrix} > 0.$$

继续用同样的技巧于 v_{21} 及 v_{22}, 不难看出式(2)成立.

下面看两个例子.

例 1 文献[4]考虑区间矩阵

$$I[P,Q] = \begin{pmatrix} [-10,-9] & [-7,-6] \\ [20,25] & [-4,-3] \end{pmatrix}. \tag{6}$$

检验其一顶点矩阵

$$V_1 = \begin{bmatrix} -10 & -7 \\ 20 & -4 \end{bmatrix}.$$

因 $\mathrm{tr}(V_1) = -14 < 0$, $\det(V_1) = 180 > 0$, 故 V_1 稳定. 容易验证, 其它 15 个顶点也稳定, 故 $I[P,Q]$ 稳定.

用数值方法可给出最大稳定区间矩阵,包含式(6)的最大稳定区间为(允许计算机误差):

$$I[P,Q] \subset I_{\max} =$$

$$\begin{pmatrix} [-13.482799,-5.517201] & [-10.482799,-2.517201] \\ [2.586005,42.413995] & [-7.482799,0.482799] \end{pmatrix}.$$

可以看出,式(6)是一个非常保守的稳定区间.

例 2 考虑区间矩阵

$$I[P,Q] = \begin{pmatrix} [-3.6,-2.4] & [-6.2,-3.8] \\ [-0.4,4.4] & [-1.96,-0.04] \end{pmatrix}.$$

显然顶点

$$V = \begin{pmatrix} -2.4 & -6.2 \\ -0.4 & -0.04 \end{pmatrix}$$

不稳定,故 $I[P,Q]$ 不稳定. 数值方法可找到 $I[P,Q]$ 包含的最大稳定子区间为

$$I[P,Q] \supset I_{\max} =$$

$$\begin{pmatrix} [-3.5176595,-2.4823405] & [-6.0353119,-3.964681] \\ [-0.070638,4.070638] & [-1.8262552,-0.1717448] \end{pmatrix}.$$

定理 1 的优点是其简捷,易于检验.

3 非线性系统的吸引域估计(Estimation of region of attraction of nonlinear systems)

考虑平面非线性控制系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y), & f(0,0) = 0, \\ \dot{y} = g(x,y), & g(0,0) = 0, \end{cases} \tag{7}$$

基于 Jacobian 猜想,文献[5]给出平面上零点的有界邻域 D 为吸引域的充分条件.

定理 2 文献[5]如果

i) $\forall x \in D$, 式(7)的 Jacobi 矩阵

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}$$

为稳定矩阵;

ii) 系统(7)由 D 的边界 ∂D 出发的轨线进入 D, 则式(7) 在 D 上渐近稳定,且 D 为其吸引域.

直接检验 D 的所有点的 Jacobi 矩阵的稳定性是困难的. 下面利用引理 1 的间接方法给出吸引域的两种估算方法.

推论 1 (定义模 $\|p\| = \sqrt{x_p^2 + y_p^2}$) 如果存在 $r > 0$, 使得

i) 在 $\|p\| = r$ 上

$$xf(x,y) + yg(x,y) < 0; \tag{8}$$

ii) 在 $\|p\| < r$ 内, $\det(J)$ 及 $\mathrm{tr}(J)$ 没有使矩阵 J 不稳定的驻点;

iii)

$$\min_{\|p\|=r} \det(J) > 0, \tag{9}$$

$$\max_{\|p\|=r} \mathrm{tr}(J) < 0, \tag{10}$$

则 $D = \{p \mid \|p\| \leqslant r\}$ 为一吸引域.

证 因为现在考虑一个园邻域,显见式(8) 保证了系统(7) 由 D 的边界 ∂D 出发的轨线进入 D.

现在找 $\det(J)$ 的最小值与 $\mathrm{tr}(J)$ 的最大值. 如果它们发生在区域内,则必在驻点处. 若没有使矩阵 J 不稳定的驻点,则只可能有两种情况: $\det(J)$ 的最小值大于零或最小值发生在边界上以及 $\mathrm{tr}(J)$ 的最大值小于零或发生在边界上. 于是式(9) 保证了

$\det(J) > 0, \forall x \in D$,式(10)保证了 $\mathrm{tr}(J) < 0, \forall x \in D$.推论1获证.

下面举例说明其应用:

例3 考虑系统

$$\begin{cases}\dot{x} = y,\\ \dot{y} = -x - y + y^2.\end{cases} \tag{11}$$

因为

$$xf(x,y) + yg(x,y) = -y^2 + y^3 = -r^2\sin^2\theta(1 - r\sin\theta),$$

故条件i)在 $r<1, \sin\theta\neq 0$ 时成立.

现在需要证明,在 $\sin\theta = 0$ 时,即 $q_{1,2} = (0)$ 两点,轨线不会跑出 D 域.取 $V = x^2 + y^2 = r^2$,容易证明

$$\dot{V}|_{q_i} = \ddot{V}|_{q_i} = 0,\ \dddot{V}|_{q_i} = -V\cdot(\dot{\theta})^2,$$

故只要证明 q_i 处 $\dot{\theta}\neq 0$ 即可.在此二点,直接计算可知

$$(\tan\theta)' = -1 \neq 0,$$

故 $\dot{\theta}\neq 0$. 由此可知,在此二点出发的轨线也是向内的.

又因为

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1\\ -1 & 2y-1\end{bmatrix},$$

$\det(J) = 1 > 0$,所以我们只考虑

$$\mathrm{tr}(J) = 2y - 1$$

即可.显见其无不稳定驻点.考虑条件iii),即要证明式(10):若要对一切 θ 均有

$$2y - 1 = 2r\sin\theta - 1 < 0,$$

则 $r < \dfrac{1}{2}$.

综上可知,$D = \{p \mid \|p\| < \dfrac{1}{2}\}$ 为一个吸引域.

下面的推论给出矩形邻域的估计方法.因为其基本原理与推论1类似,就不再给出证明.

定义 $\|p\| = \max\{|p_x|, |p_y|\}$.

推论2 如果存在 $r > 0$,使得

i) 在 $S_T = \{(x,y)|y=r,|x|\leqslant r\}$上,$g(x,y)<0$;

在 $S_B = \{(x,y)|y=-r,|x|\leqslant r\}$上,$g(x,y)>0$;

在 $S_R = \{(x,y)|y = r,|x|\leqslant r\}$ 上,$g(x,y)<0$;

在 $S_L = \{(x,y)|y=r,|x|\leqslant r\}$ 上,$g(x,y)>0$;

ii) 在 $\|p\| < r$ 内,$\det(J)$ 及 $\mathrm{tr}(J)$ 没有使 J 不稳定的驻点;

iii)

$$\min_{\|p\|=r} \det(J) > 0, \tag{12}$$

$$\max_{\|p\|=r} \mathrm{tr}(J) > 0, \tag{13}$$

则 $D = \{p \mid \|p\| \leqslant r\}$ 为一吸引域.

例4 考虑下列系统

$$\begin{cases}\dot{x} = -2x + y^2,\\ \dot{y} = x - 4y + x^2,\end{cases}$$

其Jacobi矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} -2 & 2y\\ 1+2x & -4\end{bmatrix},$$

因为 $\mathrm{tr}(J) = -6 < 0$,它满足要求,不必考虑.因此,只要讨论

$$\det(J) = 8 - 2y - 4xy.$$

下面考虑条件i),在上边 S_T 上有

$$x - 4r + x^2 < 0, \text{且 } |x| < r,$$

它等价于:$r^2 - 3r < 0$.于是有:$r < 3$.同样基于这种初等讨论可知,在下边 S_B 上有 $r > \dfrac{1}{16}$;在右边 S_R 上要求:$r < 2$;在左边 S_L 上,一切 $r > 0$ 均满足要求.因此,条件i)要求

$$\frac{1}{16} < r < 2. \tag{14}$$

考虑条件ii),找驻点:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x}\det(J) = -4y = 0,\\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial y}\det(J) = -2 - 4x = 0,\end{cases}$$

驻点为$(-\dfrac{1}{2}, 0)$.对此驻点,$\det(J) = 8$,故 $\det(J)$ 无使 J 不稳定驻点.

考虑条件iii),即式(11),在 S_T 要求

$$\det(J) = 8 - 2r - 4rx > 0,\ |x| < r,$$

由初等讨论可知其解为

$$r < 1.186140662. \tag{15}$$

类似的讨论可知,在 S_R 及 S_L 上,我们得到同样的要求.又在 S_B 上我们要求

$$r < 1.68140662. \tag{16}$$

综合式(14)~式(16)可知

$$D = \{p \mid \|p\| < 1.186140662\}$$

为一吸引域.

注 因推论1中的模定义的是园邻域,故例3给出的是半径为 r 的园盘形吸引域.而推论2定义的模是方邻域,故例4给出的是边长为 $2r$ 的正方形吸引域.

4 二维滑动模控制设计(Design of sliding mode control of two dimensional systems)

能否将上述二维系统吸引域估计的方法用到高维系统中去,这是一个十分吸引人的题目.

考虑系统

$$\dot{x} = f(x), \quad f(0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n. \qquad (17)$$

首先,如果存在一个可积分布 Δ, $\dim(\Delta) = 2$, 使 $f(x) \in \Delta$, 则二维系统的结论可立即用到系统(17)上.然而,这样的 Δ 是不存在的.

命题 1 对系统(17),如果 $Df(x)$ 稳定,则在 0 点邻域 U 不存在可积分布 Δ, $\mathrm{codim}(\Delta) \geqslant 1$, 使 $f \in \Delta$.

证 反设这样的分布存在.因为 $\mathrm{codim}(\Delta) \geqslant 1$,故存在一形式 $0 \neq \omega \in V^*(U)$,使得 $L_f(\omega) = 0$. 但

$$L_f(\omega) = f^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}} + \omega \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \qquad (18)$$

在零点, $f(0) = 0$, 故式(18)变为

$$\omega Df(0) = 0,$$

故 $\omega = 0$, 矛盾.

直接将二维结果推广到高维是困难的.但是,如果 $f(x)$ 有二维稳定的不变子流形,则二维吸引域估计可用于二维滑动模的设计[6],作法如下:将 $f(x)$ 的二维稳定不变子流形选作二维滑动模,然后,寻找适当变结构控制将系统控制到滑模上.

考虑控制系统

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{m} g^i(x) u_i, \; x \in \mathbb{R}^n. \qquad (19)$$

如果 $f(x)$ 有一个二维稳定不变子流形

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i^2 = 0 \mid i = 1, \cdots, n-2\},$$

且 $G|_s = 0$. 这里, $G = [g^1, g^2, \cdots, g^m]$, S 的坐标描述可能带有坐标变换,那么,系统(18)可分解为

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= f^1(x^1), \\ \dot{x}^2 &= f^2(x) + \sum_{i=1}^{m} g^i(x) u_i. \end{aligned} \qquad (20)$$

现在,如果在 S 上选一吸引域 D,使 D 为依上节方法设计的 $f^1(x^1)$ 的吸引域,且存在控制,使

$$f_j^2(x) + \sum_{i=1}^{m} g_j^i(x) u_i \begin{cases} > 0, x_j^2 < 0 \\ < 0, x_j^2 > 0. \end{cases} \qquad (21)$$

则满足上述条件的变结构控制使柱体

$$D \times \mathbb{R}^{n-2}$$

成为反馈系统的吸引域.

特别值得强调的是:具有负实部的特征值.对于定常系统,该方法给出平面区间矩阵稳定性的充要条件,对于非线性系统,利用关于 Jacobian 猜想的已有结果,本文给出两种方法,分别用于估计非线性系统的园形及矩形吸引域.最后,这种估计被用于高维系统二维滑动模的设计及反馈系统吸引域的估计.

参考文献(References)

1 Willems J L. Stability Theory of Dynamical Systems. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1970

2 Bialas S. A necessary and sufficient condition for the stability of interval matrices. Int. J. Control, 1983, 37(4): 717 – 722

3 Barmish B R, Hollot C V. Counter-example to a recent result on the stability of interval matrices by Bialas S. Int. J. Control, 1984, 39(5): 1103 – 1104

4 廖晓昕. 稳定性的数学理论及应用. 武汉: 华中师范大学出版社, 1988

5 秦化淑, 陈彭年, 王朝珠. 平面有界区域上的 Jacobian 猜想. 中国控制会议论文集. 北京: 中国科学技术出版社, 1996, 317 – 320

6 Utkin V. Sliding Modes Their Application in Variable Structure Systems. Moscow: MIR, 1978

本文作者简介

程代展 1970 年毕业于清华大学. 1981 年获中科院研究生院硕士学位. 1985 年获美国华盛顿大学博士学位. 现为中科院系统所研究员, 博士生导师. 主要研究兴趣: 非线性系统控制, 数值实现及工程应用.

秦化淑 见本刊 1999 年第 1 期第 15 页.