用动态补偿法讨论奇异系统的强模型匹配问题*

王　晶　　刘晓平
(北京化工大学自动化系·北京,100029)　(东北大学信息科学与工程学院·沈阳,110006)

摘要: 讨论了一类非线性奇异系统的强模型匹配问题.在扩展结构算法的基础上,导出了该问题可解的充要条件,并给出适当的动态补偿控制器.

关键词: 奇异系统; 强模型匹配; 扩展结构算法

Strong Model Matching for Singular Systems by Dynamic Compensator

Wang Jing
(Department of Automation, Beijing University of Chemical Engineering·Beijing, 100029, P.R.China)
Liu Xiaoping
(School of Information Science and Engineering, Northeastern University·Shenyang, 110006, P.R.China)

Abstract: This paper investigates the problem of designing a compensating control law for nonlinear singular systems so that the response of the closed-loop system strongly matches that of a prescribed, driven, nonlinear model. A sufficient and necessary condition for achieving strong model matching is established on the basis of the generalized structure algorithm for nonlinear singular systems.

Key words: singular systems; strong model matching; generalized structure algorithm

1 引言(Introduction)

考虑如下非线性奇异系统 P:

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x) + p_1(x)z + g_1(x)u, \\ 0 = f_2(x) + p_2(x)z + g_2(x)u, \\ y = h(x). \end{cases} \tag{1}$$

其中 $x \in X \subset \mathbb{R}^n, z \in Z \subset \mathbb{R}^s, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^m$. $p_1(x), p_2(x), g_1(x)$ 和 $g_2(x)$ 分别是 $n \times s, s \times s, n \times m$ 和 $s \times m$ 维的解析函数矩阵. $f_1(x), f_2(x), h(x)$ 分别是 $n \times 1, s \times 1$ 和 $m \times 1$ 维的解析函数向量.

尽管系统(1)是一类特殊的系统,但它在实际中有着广泛的应用,诸如机器人系统[1,2],受限力学系统[3,4]和化学过程[5]等.目前对于这类系统的研究主要限于它的可解性,能控性,线性化,解耦及反馈稳定化等控制问题,而关于它的模型匹配问题[6]的研究很少,且多采用状态反馈法.

本文的目的在于讨论如何找到一个动态补偿器,使得在该补偿器的作用下,系统 P 与给定的正常非线性模型的输入/输出响应是强匹配的,也就是说能够复制由非线性模型产生的所有时间函数.这里提出一种新方法:利用扩展结构算法求解强模型匹配问题.

2 定义和预备知识(Definition and preliminaries)

用于描述期望闭环特性的匹配模型 M 由下述方程给出

$$\dot{x}_M = f_M(x_M) + g_M(x_M)v, y_M = h_M(x_M). \tag{2}$$

其中 $x_M \in X_M \subset \mathbb{R}^{n_M}, v \in \mathbb{R}^{m_M}, y_M \in \mathbb{R}^m, f_M(x_M), g_M(x_M)$ 的列向量和 $h_M(x_M)$ 的行向量都是 x_M 的解析函数.

用于控制系统 P 的动态补偿器 Q,其输入为 x, z 和 v,输出为 u,一般形式如下

$$\dot{\xi} = a(x,z,\xi,v), \quad u = c(x,z,\xi,v). \tag{3}$$

其中状态 $\xi \in N \subset \mathbb{R}^q$,向量场 a 和函数 c 是解析的.由动态补偿器 Q 作用下系统 P 所组成的闭环系统记作 $P \circ Q$,它的输出记作 $y^{P \circ Q}$.

由系统 P 和模型 M 组合在一起的扩展系统 E 为

$$\begin{cases} \dot{x}^E = f^E(x^E) + p^E(x^E)z + g^E(x^E)u + k^E(x^E)v, \\ 0 = f_2(x) + p_2(x)z + g_2(x)u, \\ y^E = h^E(x^E) = h(x) - h_M(x_M). \end{cases} \tag{4}$$

其中 $x^E = [x^T, x_M^T]^T \in X \times X_M$,输入为 u 和 v,输出为 y^E,且

* 国家教育部跨世纪优秀人才培养计划基金和留学回国人员科研基金资助课题.
本文于1997年12月29日收到.1998年12月16日收到修改稿.

$$f^E(x^E)=\begin{bmatrix}f_1(x)\\f_M(x_M)\end{bmatrix},\ p^E(x^E)=\begin{bmatrix}p_1(x)\\0\end{bmatrix},$$

$$g^E(x^E)=\begin{bmatrix}g_1(x)\\0\end{bmatrix},\ k^E(x^E)=\begin{bmatrix}0\\g_M(x_M)\end{bmatrix}.$$

在补偿器 Q 作用下的扩展系统 E 记作 $E\circ Q$,其输出记作 $y^{E\circ Q}$.为简化书写,在下面的某些表达式中将括号内 x 和 x^E 变量省略.

定义 1 给定非线性奇异系统 P,模型 M 和初始点 $x_0^E=(x^0,x_M^0)\in X\times X_M$,强模型匹配问题就是找到动态补偿器 Q 及其初始状态 ξ^0 使得

1) 对任意输入 v,系统 $P\circ Q$ 存在唯一可微解 $\{x(x^0,\xi^0,t,v),z(x^0,\xi^0,t,v),\xi(x^0,\xi^0,t,v)\}$.

2) 存在一个正实数 T 使得对所有 v 和 $0\leqslant t\leqslant T$

$$y^{P\circ Q}(x^0,z^0,\xi^0,t,v)-y_M(x_M^0,t,v)=0.$$

在本文中我们假定所讨论的奇异系统 P 是可正则化的,那么通过正则化算法[7],系统的代数方程转化为 $0=f_2^*(x)+p_2^*(x)z+g_2^*(x)u$,其中矩阵 $[p_2^*(x)\ g_2^*(x)]$ 在 x^0 的某邻域内具有定常秩 s.必存在一 $m\times s$ 维矩阵 $\gamma(x)$ 使得 $p_2^*(x)+g_2^*(x)\gamma(x)$ 在 x^0 的某邻域内是非奇异的.因此形如 $u=\bar{u}+\gamma(x)z$ 的反馈使得相应的闭环系统对任意可微的输入 $\bar{u}$ 具有唯一的可微解,即定义 1 中的条件(1) 满足.由此可以唯一地解出代数变量

$$z=-[p_2^*(x)+g_2^*(x)\gamma(x)]^{-1}[f_2^*(x)+g_2^*(x)\bar{u}],$$

并将奇异系统(1)转化成等价的正常系统

$$\dot{x}=f_1-[p_1+g_1\gamma][p_2^*+g_2^*\gamma]^{-1}f_2^*+\{g_1-[p_1+g_1\gamma][p_2^*+g_2^*\gamma]^{-1}g_2^*\}\bar{u}.\quad(5)$$

我们可以用 Moore 方法[8]解决系统(5)的强模型匹配问题.由此所得的结论将取决于矩阵 $\gamma(x)$ 的选择.然而矩阵 $\gamma(x)$ 是很难事先确定的,为此在下一节中将提出一种新方法,对初始系统(1)的约束方程直接进行处理.

3 算法描述及结论(Algorithm description and results)

本节引入扩展结构算法,该算法对讨论强模型匹配问题起着十分重要的作用.首先给出这样一个记号,令 $L_fh(x)$ 表示函数 $h(x)$ 沿着向量场 $f(x)$ 的方向导数,定义如下:

$$L_fh(x)=\mathrm{d}h(x)f(x)=\left[\frac{\partial h(x)}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial h(x)}{\partial x_n}\right][f_1(x)\cdots f_n(x)]^{\mathrm{T}}.$$

扩展结构算法

第 1 步 考虑输入 v 为零的扩展系统 E_0.令 $t_0=0$,假定矩阵

$$R_1(x^E)=\begin{bmatrix}p_2^*(x) & g_2^*(x)\\L_{p^E}h^E(x^E) & L_{g^E}h^E(x^E)\end{bmatrix}$$

在 $x_0^E\in X\times X_M$ 的邻域内具有定常秩 t_1,则存在光滑函数矩阵 $E_1(x^E)$ 和 $H_1^1(x^E)$ 及实数矩阵 Q_1 满足 $\begin{bmatrix}Q_1\\H_1^1(x^E)\end{bmatrix}$ 在 x_0^E 附近是非奇异的,且

$$\begin{bmatrix}I & 0\\0 & Q_1\\E_1(x^E) & H_1^1(x^E)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_2^*(x) & g_2^*(x)\\L_{p^E}h^E(x^E) & L_{g^E}h^E(x^E)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p_2^*(x) & g_2^*(x)\\S_1^1(x^E) & S_1^2(x^E)\\0 & 0\end{bmatrix}.$$

第 k 步 假定矩阵

$$R_k(x^E)=\begin{bmatrix}p_2^*(x) & g_2^*(x)\\S_1^1(x^E) & S_1^2(x^E)\\\vdots & \vdots\\S_{k-1}^1(x^E) & S_{k-1}^2(x^E)\\L_{p^E}\bar{\phi}_{k-1}(x^E) & L_{g^E}\bar{\phi}_{k-1}(x^E)\end{bmatrix}$$

在 x_0^E 附近具有定常秩 t_k,则存在一系列光滑函数矩阵 $E_k(x^E)$ 和 $\{H_k^1(x^E),\cdots,H_k^k(x^E)\}$ 及一实数矩阵 Q_k 使得 $\begin{bmatrix}Q_k\\H_k^k(x^E)\end{bmatrix}$ 在 x_0^E 附近是非奇异的,且

$$\begin{bmatrix}I & 0 & \cdots & 0 & 0\\0 & I_{\eta_1} & \cdots & 0 & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\0 & 0 & \cdots & I_{\eta_{k-1}} & 0\\0 & 0 & \cdots & 0 & Q_k\\E_k & H_k^1 & \cdots & H_k^{k-1} & H_k^k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_2^* & g_2^*\\S_1^1 & S_1^2\\\vdots & \vdots\\S_{k-1}^1 & S_{k-1}^2\\L_{p^E}\bar{\phi}_{k-1} & L_{g^E}\bar{\phi}_{k-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p_2^* & g_2^*\\S_1^1 & S_1^2\\\vdots & \vdots\\S_{k-1}^1 & S_{k-1}^2\\S_k^1 & S_k^2\\0 & 0\end{bmatrix}.$$

其中矩阵$\begin{bmatrix} p_2^*(x) & g_2^*(x) \\ S_1^1(x^E) & S_1^2(x^E) \\ \vdots & \vdots \\ S_k^1(x^E) & S_k^2(x^E) \end{bmatrix}$在 x_0^E 的秩为 t_k.

设

$$\eta_k = t_k - t_{k-1}$$
$$\phi_k = Q_k L_{f^E} \bar{\phi}_{K-1},$$
$$\bar{\phi}_k = E_k f_2^* + H_k^1 \phi_1 + \cdots + H_k^{k-1}\phi_{k-1} + H_k^k L_{f^E} \bar{\phi}_{K-1}.$$

强模型匹配问题的关键是找到一个控制 u 使得对任意的输入 v,扩展系统 E 的输出都是零,即对所有的 v, $h^E(x^E) = 0$.这就要求

$$\bar{\phi}_1(x^E) = 0, \bar{\phi}_2(x^E) = 0, \cdots, \bar{\phi}_k(x^E) = 0.$$

定义流形

$$N_k = \{x^E \in X \times X_M \mid h^E(x^E) = \bar{\phi}_1(x^E) = \cdots = \bar{\phi}_k(x^E) = 0\}.$$

设 α 是满足$N_\alpha = N_{\alpha+1}$的最小整数,则扩展结构算法将在第 $\alpha \leqslant n + n_M$ 步停止.

修改扩展结构算法可获得如下模型匹配算法:首先对系统 E 应用扩展结构算法的第一步可得矩阵

$$R'_1(x^E) = \begin{bmatrix} p_2^*(x) & g_2^*(x) & 0 \\ L_{p^E}h^E(x^E) & L_{g^E}h^E(x^E) & L_{k^E}h^E(x^E) \end{bmatrix}.$$

则

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & Q_1 \\ E_1(x^E) & H_1^1(x^E) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ L_{k^E}h(x^E) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ D_1(x^E) \\ \bar{D}_1(x^E) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ Q_1 L_{k^E}h^E(x^E) \\ H_1^1(x^E) L_{k^E}h^E(x^E) \end{bmatrix}.$$

于是模型匹配算法的其他步递归定义如下:在第 k 步,对矩阵

$$[0 \quad D_1(x^E) \quad \cdots \quad D_{k-1}(x^E) \quad L_{k^E}\bar{\phi}_{k-1}(x^E)]^{\mathrm{T}}$$

进行相同的变换将得到下述关系:

$$\begin{bmatrix} D_k(x^E) \\ \bar{D}_k(x^E) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_k L_{k^E}\bar{\phi}_{k-1}(x^E) \\ H_k^1(x^E)D_1(x^E) + \cdots + H_k^{k-1}(x^E)D_{k-1}(x^E) + H_k^k(x^E)L_{k^E}\bar{\phi}_{k-1}(x^E) \end{bmatrix}.$$

设 α 和 t_α 如扩展结构算法中定义.现在我们给出强模型匹配问题可解的充要条件.

定理 1 给定可正则化的非线性奇异系统 P 和模型 M.如果 $t_\alpha = s + m$,令 $\delta = \alpha$,否则如果 $t_\alpha < s + m$,令 $\delta = n + n_M$.则必存在一流形 N_α 使得强模型匹配问题在 $x_0^E \in N_\alpha$ 点可解当且仅当

$$\bar{D}_k(x^E) = 0,\ 1 \leqslant k \leqslant \delta,\ x^E \in N_\alpha. \tag{6}$$

证 充分性.由扩展结构算法和模型匹配算法的推导过程可知,如果 $\bar{D}_k(x^E) = 0, 1 \leqslant k \leqslant \delta, x^E \in N_\alpha$,那么必存在一个局部定义在 $x_0^E \in N_\alpha$ 邻域上的反馈 $u = \alpha(x^E) + \beta(x^E)v + \gamma(x)z$,使得系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x) + g_1(x)\alpha(x, x_M) + [p_1(x) + g_1(x)\gamma(x)]z + g_1(x)\beta(x, x_M)v, \\ 0 = f_2^*(x) + g_2^*(x)\alpha(x, x_M) + [p_2^*(x) + g_2^*(x)\gamma(x)]z + g_2^*(x)\beta(x, x_M)v, \\ \dot{x}_M = f_M(x_M) + g_M(x_M)v, \\ y^E = h(x) + h_M(x_M) \end{cases} \tag{7}$$

的输出 y^E 在x_0^E的某邻域内,对属于该邻域的所有初始状态 x^E 都为零,即强模型匹配问题在定义 1 意义下是可解的,且补偿器 Q 为

$$\dot{\xi} = f_M(\xi) + g_M(\xi)v,$$
$$u = \alpha(x, \xi) + \beta(x, \xi)v + \gamma(x)z,$$

其中 $\xi = x_M$.关于反馈 u 的构造将在后面讨论.

必要性.假定 $k' \leqslant \delta$ 是满足$\bar{D}_{k'}(x^E) \neq 0$的第一个整数.则由扩展结构算法和模型匹配算法可得

$$\begin{aligned} &\bar{\phi}_k(x^E) + \bar{D}_k(x^E)v = 0,\ k = k', \\ &\bar{\phi}_k(x^E, v, \cdots, v^{(k-1)}) + \bar{D}_k(x^E, v, \cdots, v^{(k)}) = 0,\ k > k'. \end{aligned} \tag{8}$$

不难看出只有对某些满足方程(8)的输入 v,系统的输出 y^E 是零,这与强模型匹配问题可解的条件矛盾.

现在我们分两种情况讨论如何构造动态补偿控制律 u.当算法结束时

$$0 = \begin{bmatrix} f_2^*(x) \\ \Phi(x^E) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_2^*(x) \\ S^1(x^E) \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} g_2^*(x) \\ S^2(x^E) \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ D(x^E) \end{bmatrix} v.$$

其中

$$\Phi(x^E) = \begin{bmatrix} \phi_1(x^E) \\ \vdots \\ \phi_\alpha(x^E) \end{bmatrix}, S^1(x^E) = \begin{bmatrix} S_1^1(x^E) \\ \vdots \\ S_\alpha^1(x^E) \end{bmatrix},$$

$$S^2(x^E) = \begin{bmatrix} S_1^2(x^E) \\ \vdots \\ S_\alpha^2(x^E) \end{bmatrix}, D(x^E) = \begin{bmatrix} D_1(x^E) \\ \vdots \\ D_\alpha(x^E) \end{bmatrix}.$$

选择矩阵 $\gamma(x)$ 使得 $p_2^*(x) + g_2^*(x)\gamma(x)$ 为非奇异,则控制 u 满足

$$0 = \Phi - [S^1 + S^2\gamma][p_2^* + g_2^*\gamma]^{-1}f_2^* + \{S^2 - [S^1 + S^2\gamma][p_2^* + g_2^*\gamma]^{-1}g_2^*\}u - D.$$

计算

$$\begin{bmatrix} p_2^* & g_2^* & 0 \\ S^1 & S^2 & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & -[p_2^*+g_2^*\gamma]^{-1}g_2^* & 0 \\ \gamma & I-\gamma[p_2^*+g_2^*\gamma]^{-1}g_2^* & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} p_2^*+g_2^*\gamma & 0 & 0 \\ S^1+S^2\gamma & S^2-[S^1+S^2\gamma][p_2^*+g_2^*\gamma]^{-1}g_2^* & D \end{bmatrix}.$$

由条件(6)可知 $\operatorname{rank}R_\alpha(x^E)=\operatorname{rank}R'_\alpha(x^E)$，则矩阵

$$\{S^2(x^E)-[S^1(x^E)+S^2(x^E)\gamma(x)][p_2^*(x)+g_2^*(x)\gamma(x)]^{-1}g_2^*(x)\} \tag{9}$$

具有行满秩 $t_\alpha - s$.

当 $t_\alpha = m+s$ 时，矩阵(9)是非奇异的. 对选定的 $\gamma(x)$，动态补偿控制律 $u=\alpha(x^E)+\beta(x^E)v+\gamma(x)z$ 是唯一的，其中

$$\alpha=-\{S^2-[S^1+S^2\gamma][p_2^*+g_2^*\gamma]^{-1}g_2^*\}^{-1}\{\Phi-[S^1+S^2\gamma][p_2^*+g_2^*\gamma]^{-1}f_2^*\},$$

$$\beta=-\{S^2-[S^1+S^2\gamma][p_2^*+g_2^*\gamma]^{-1}g_2^*\}^{-1}D.$$

当 $t_\alpha < m+s$ 时，动态补偿控制律的计算要比第一种情况复杂得多. 应该指出的是当 $m=m_M$ 和 $\operatorname{rank}D(x^E)=t_\alpha-s$ 时，所有的控制都应该满足 $\beta(x^E)$ 是非奇异的，因为 $m\neq m_M$ 意味着 $\beta(x^E)$ 不是方阵，$\operatorname{rank}D(x^E)<t_\alpha-s$ 意味着 $\beta(x^E)$ 的行不是独立的.

4 举例(Example)

这里我们考虑刀刃以点接触方式在平面上运动的实际例子：

$$\begin{cases} \ddot{x}=\lambda\sin\phi+u_1\cos\phi, \\ \ddot{y}=-\lambda\cos\phi+u_1\sin\phi, \\ \dot{\phi}=u_2. \end{cases} \tag{10}$$

约束力 λ 满足不完全受限方程：$\dot{x}\sin\phi-\dot{y}\cos\phi=0$. 在实际中可以选择位置坐标 x 作为输出变量 y_0. 模型 M 是一个简单的非线性单输入 — 单输出系统：

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -x_1+x_2 \\ -3x_2+x_1^3 \\ x_1-2x_3 \\ -x_4+x_3^2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 2+\sin^2x_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}v, \\ y_M=x_1-3x_3. \end{cases} \tag{11}$$

采用扩展结构算法和模型匹配算法对本例进行仿真可得流形

$$N_\alpha=\{(\phi,x,y,\dot{\phi},\dot{x},\dot{y},x_1,x_2,x_3,x_4)\mid \dot{x}\sin\phi-\dot{y}\cos\phi=0, x=x_1-3x_3, \dot{x}=x_2-4x_1+6x_3\}.$$

不难看出在本例中，当输入 u 满足

$$0=\dot{\phi}\sin\phi(\dot{x}\cos\phi+\dot{y}\sin\phi)+10x_1-7x_2-12x_3+x_1^3-\cos\phi u_1+(2+\sin x_4)v,$$

系统(10)的输出与模型(11)的输出是强匹配的，仿真结果如图1所示. 其中初始条件为

$$\{x(0),\dot{x}(0),y(0),\dot{y}(0),\phi(0),\dot{\phi}(0)\}=\{0.1,1.0,0.01,0.2,\pi/4,0\},$$
$$\{x_1(0),x_2(0),x_3(0),x_4(0)\}=\{0.4,0,0.1,\pi/4\}.$$

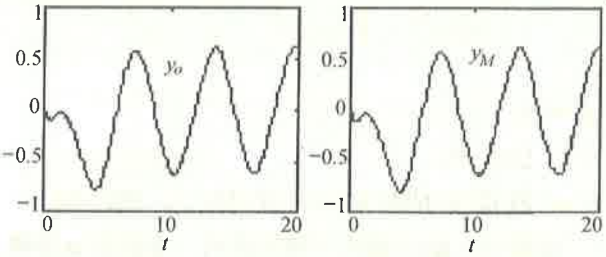

图1 匹配路径 y_0 和模型输出 y_M: $u_2=\cos(t)$, $v=2\sin(t)$

Fig. 1 Matching path y_0 and model output y_M: $u_2=\cos(t)$, $v=2\sin(t)$

5 结论(Conclusion)

本文讨论了将一类非线性奇异系统强匹配成一般非线性系统的问题. 根据非线性奇异系统的扩展结构算法，导出了强匹配问题可解的充分必要条件.

参考文献(References)

1 McClamroch N H and Wang D W. Feedback stabilization and tracking of constrained robots. IEEE Trans. Automat. Contr., 1988, 33(5): 419 – 426

2 D'Andrea-Novel B, Bastin G and Campin G. Modeling and control of nonholonomic wheeled mobile robots. Proceedings. of IEEE Int. Conf. Robotics and Automat., Sacramento, CA, 1991, 1130 – 1135

3 Bloch A M, Reyhanoglu M and McClamroch N H. Control and stabilization of nonholonomic dynamic systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1992, 37(11): 1746 – 1757

4 You L S and Chen B S. Tracking control designs for both holonomic and non-holonomic constrained mechanical systems: a unified viewpoint. Int. J. Control, 1993, 58(3): 587 – 612

5 Kumar A and Daoutidis P. Control of nonlinear differential-algebraic process systems. Proceedings of American Control Conference, Baltimore, Maryland, 1994, 1: 330 – 335

6 Kucera V. Model matching of descriptor systems by proportional state feedback. Automatica, 1992, 28(2): 423 – 425

7 Liu X P and Celikovsky S. Feedback control of affine nonlinear singular control systems. Int. J. Control, 1997, 68(4): 753 – 774

8 Moore B C and Silverman L M. Model matching by state feedback and dynamic compensation. IEEE Trans. Automat. Contr., 1972, 17(5): 491 – 497

本文作者简介

王 晶 1972年生. 1994年东北大学本科毕业，1998年获东北大学工学博士学位. 现任北京化工大学自动化系讲师. 主要研究方向为非线性奇异系统，非线性控制系统几何理论.

刘晓平 1962年生. 分别于1984，1987，1989年在东北大学自动控制系获学士学位，硕士学位，博士学位. 现任东北大学自动控制系教授，博士生导师. 目前主要研究方向包括非线性奇异系统和非线性控制系统的鲁棒控制.