一类不确定非完整动力学系统的鲁棒镇定*

董文杰　霍　伟

(北京航空航天大学第七研究室·北京,100083)

摘要: 研究了一类不确定非完整动力学系统的鲁棒镇定问题,设计出了时变镇定律,仿真结果表明了该镇定律的有效性.

关键词: 非完整控制系统; 不确定非线性系统; 鲁棒镇定; 移动机器人

Robust Stabilization of Uncertain Dynamic Nonholonomic Systems

Dong Wenjie　and　Huo Wei

(The Seventh Research Division, Beijing University of Aeronautics and Astronautics·Beijing, 100083, P.R.China)

Abstract: This paper studies robust stabilization problem of uncertain dynamic nonholonomic chained system. New time-varying controller is given. Simulation results show effectiveness of the approach.

Key words: nonholonomic control; uncertain nonlinear system; nonlinear system; wheeled mobile robot

1　问题的提出(Problem statement)

文献[1]讨论了惯性参数未知非完整动力学系统的镇定问题,提出了一种自适应控制方案.但其计算较为复杂,为克服该缺点,本文提出一种新的鲁棒控制方案.

受非完整约束机械系统的一般方程为

$$M(q)\ddot{q}+C(q,\dot{q})\dot{q}+G(q)=B(q)\tau+J^{\mathrm{T}}(q)\lambda, \tag{1}$$

$$J(q)\dot{q}=0. \tag{2}$$

其中 $q=[q_1,\cdots,q_n]^{\mathrm{T}}$ 是广义坐标,$M(q)$ 是 $n\times n$ 维有界正定对称阵,$C(q,\dot{q})\dot{q}$ 表示哥氏力和离心力,$G(q)$ 表示重力项,$B(q)$ 是 $n\times m$ 维列满秩输入变换阵,$2\leqslant m<n$,$J(q)$ 是 $(n-m)\times n$ 维满秩矩阵,λ 是 $(n-m)$ 维 Lagrange 乘子,τ 是 m 维输入,T 表示转置.假定约束(2)是完全非完整的.式(1)有如下两个性质:1) 适当定义 C,$\dot{M}-2C$ 是反对称阵;2) $M(q)\dot{\xi}+C(q,\dot{q})\xi+G(q)=Y(q,\dot{q},\xi,\dot{\xi})a$,其中 $a\in\mathbb{R}^p$ 是常值惯性参数向量,$Y(q,\dot{q},\xi,\dot{\xi})$ 与 a 无关.

设 $g_1(q),\cdots,g_m(q)$ 构成 $J(q)$ 零空间的基,记 $g(q)=[g_1(q),\cdots,g_m(q)]$,则由式(2)知,存在 $v=[v_1,\cdots,v_m]^{\mathrm{T}}$ 使得

$$\dot{q}=g(q)v=g_1(q)v_1+\cdots+g_m(q)v_m. \tag{3}$$

将上式两边求导并代入式(1)中,然后两边再同时左乘 $g^{\mathrm{T}}(q)$,消去式(1)中的 $J^{\mathrm{T}}(q)\lambda$,得到

$$M_1(q)\dot{v}+C_1(q,\dot{q})v+G_1(q)=B_1(q)\tau. \tag{4}$$

其中 $M_1(q)=g^{\mathrm{T}}(q)M(q)g(q)$,$C_1(q,\dot{q})=g^{\mathrm{T}}(q)M(q)\dot{g}(q)+g^{\mathrm{T}}(q)C(q,\dot{q})g(q)$,$G_1(q)=g^{\mathrm{T}}(q)G(q)$,$B_1(q)=g^{\mathrm{T}}(q)B(q)$.因而消去约束反力后,系统(1),(2)由方程(3),(4)描述.易证,$M_1(q)$ 是对称正定阵,$\dot{M}_1-2C_1$ 是反对称阵,且 $M_1(q)\dot{\xi}+C_1(q,\dot{q})\xi+G_1(q)=Y_1(q,\dot{q},\xi,\dot{\xi})a$,其中 $Y_1(q,\dot{q},\xi,\dot{\xi})$ 与 a 无关.假定 $B_1(q)$ 是满秩的.本文研究的问题是:当 a 未知时,如何设计 τ,使系统(3),(4)的状态 q 和 v 渐近趋于零点.

由于一般情况的复杂性,本文讨论式(3)能够化成单链形式的系统.不失一般性,假设式(3)为单链形式

$$\dot{q}_1=v_1;\ \dot{q}_j=v_1q_{j+1},(2\leqslant j\leqslant n-1);\dot{q}_n=v_2. \tag{5}$$

方程(3)化成式(5)的充分及必要条件见文献[2].对于多链形式的系统,不难得出本文给出的结果,略去.

2　控制器设计(Controller design)

记 $h_1(q)=[1,q_3,\cdots,q_n,0]^{\mathrm{T}}$,$H_2=[0,\cdots,0,1]^{\mathrm{T}}$,式(5)等价于 $\dot{q}=h_1(q)v_1+h_2v_2$.取全局同胚变换 $z=\psi(q)$:$z_1=q_1$,$z_2=q_2$,$z_3=q_3$,$z_{j+3}=k_jz_{j+1}+L_{h_1}z_{j+2}(1\leqslant j\leqslant n-3)$,其中 $k_i>0(1\leqslant i\leqslant n-3)$,

$$L_{h_1}z_{j+2}:=\frac{\partial z_{j+2}}{\partial q}h_1(q),(1\leqslant j\leqslant n-3).$$ 系统(4),

* 国家自然科学基金(69774009)资助课题.
本文于 1997 年 7 月 14 日收到,1998 年 9 月 16 日收到修改稿.

(5)变换成如下形式

$$\begin{cases}\dot{z}_1 = v_1;\ \dot{z}_2 = v_1 z_3,\\ \dot{z}_{j+2} = -k_j v_1 z_{j+1} + v_1 z_{j+3},\ (1 \leqslant j \leqslant n-3),\\ \dot{z}_n = v_1 L_{h_1} z_n + v_2,\\ M_2(z)\dot{v} + C_2(z,\dot{z})v + G_2(z) = B_2(z)\tau.\end{cases} \tag{6}$$

其中 $M_2(z) = M_1(q)\mid_{q=\psi^{-1}(z)}, C_2(z,\dot{z}) = C_1(q,\dot{q})\mid_{q=\psi^{-1}(z)}, G_2(z) = G_1(q)\mid_{q=\psi^{-1}(z)}, B_2(z) = B_1(q)\mid_{q=\psi^{-1}(z)}$. 易于证明 $\dot{M}_2 - 2C_2$ 是反对称阵,且 $M_2(z)\dot{\xi} + C_2(z,\dot{z})\xi + G_2(z) = Y_2(z,\dot{z},\xi,\dot{\xi})a$,其中 $Y_2(z,\dot{z},\xi,\dot{\xi})$ 与 a 无关. 设 a_0 为 a 的一个估计值且 $\| a - a_0 \| \leqslant \rho$,则有如下定理.

定理 1　对于系统(6),控制律

$$\tau = B_2^{-1}(z)[Y_2(z,\dot{z},\eta,\dot{\eta})(a_0 + u) - K_p(v-\eta) - \Lambda]. \tag{7}$$

镇定系统的状态 z 和 v 到坐标原点,其中

$$\eta = \begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mu_1 z_1 + h(z_2,\cdots,z_n,t)\\ -\mu_2 z_n - (k_{n-2}z_{n-1} + L_{h_1} z_n)\eta_1\end{bmatrix}, \tag{8}$$

$$\Lambda = \left[\frac{z_{n-1}z_n}{k_1\cdots k_{n-3}} + \frac{z_n L_{h1} z_n}{k_1\cdots k_{n-2}},\ \frac{z_n}{k_1\cdots k_{n-2}}\right]^{\mathrm{T}},$$

$$u = \begin{cases} -\rho \dfrac{Y_2^{\mathrm{T}}(v-\eta)}{\| Y_2^{\mathrm{T}}(v-\eta)\|}, & 若\ \| Y_2^{\mathrm{T}}(v-\eta)\| \neq 0,\\ 0, & 若\ \| Y_2^{\mathrm{T}}(v-\eta)\| = 0.\end{cases}$$

且 k_{n-2}, μ_1 和 μ_2 是正常数, K_p 是正定矩阵. $h(z_2,\cdots,z_n,t)$ 满足如下两个性质: 1) $h(z_2,\cdots,z_n,t)$ 是 $C^{j+1}(j \geqslant 1)$ 类函数,相对 t 一致有界,且对 t 的各阶偏导数一致有界; $h(0,\cdots,0,t) \equiv 0$; 2) z_i 有界及 $\dot{z}_i$ 和 $z_i\dot{h}(2 \leqslant i \leqslant n)$ 趋于零意味着 $z_i(2 \leqslant i \leqslant n-1)$ 趋于零(满足此条件的 $h(\cdot)$ 见注 1).

为证明此定理,需用到 Barbalat 引理的两个变形,其叙述如下:

引理 1　给定一个可微函数 $f(t):\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$,当 $t \to \infty$ 时,它收敛于某有限值. 若 $f(t)$ 的导数 $\dot{f}(t)$ 可表示成如下两项之和:第一项一致连续,第二项当 t 趋于无穷时趋于零,则当 $t \to \infty$ 时, $\dot{f}(t) \to 0$.

引理 2　可微函数 $f(t):\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$,若 $f(t) \in L_2^1$, $\dot{f}(t) \in L_\infty^1$,则当 $t \to \infty$ 时, $f(t) \to 0$. 其中 L_∞^m 是 m 维有界函数的集合, L_2^m 是 m 维平方可积的函数集合.

定理 1 的证明　记 $\tilde{v} = v - \eta$,则闭环系统方程为

$$\begin{cases}\dot{z}_1 = \eta_1 + \tilde{v}_1;\ \dot{z}_2 = \eta_1 z_3 + \tilde{v}_1 z_3,\\ \dot{z}_{j+2} = -k_j(\eta_1 + \tilde{v}_1)z_{j+1} + (\eta_1 + \tilde{v}_1)z_{j+3},\\ \qquad (1 \leqslant j \leqslant n-3),\\ \dot{z}_n = -\mu_2 z_n - k_{n-2}\eta_1 z_{n-1} + \tilde{v}_1 L_{h_1} z_n + \tilde{v}_2,\\ M_2\dot{\tilde{v}} = Y_2(z,\dot{z},\eta,\dot{\eta})(a_0 - a + u) - C_2\tilde{v} - K_p\tilde{v} - \Lambda.\end{cases} \tag{9}$$

取

$$V(t) = \frac{1}{2}\left(z_2^2 + \frac{z_3^2}{k_1} + \cdots + \frac{z_{n-1}^2}{k_1 k_2 \cdots k_{n-3}} + \frac{z_n^2}{k_1 k_2 \cdots k_{n-2}} + \tilde{v}^{\mathrm{T}} M_2 \tilde{v}\right).$$

V 沿闭环系统求导,有 $\dot{V} \leqslant \dfrac{\mu_2 z_n^2}{-k_1 k_2 \cdots k_{n-2}} - \tilde{v}^{\mathrm{T}} K_p \tilde{v}$. 所以 V 非增且有界. 于是 $z_i \in L_\infty^1(2 \leqslant i \leqslant n-1)$, $z_n \in L_\infty^1 \cap L_2^1, \tilde{v} \in l_\infty^2 \cap l_2^2$.

又由 $\dot{z}_1 = -\mu_1 z_1 + h(z_2,\cdots,z_n,t) + \tilde{v}_1$ 易知 $z_1 \in L_\infty^1$,于是由定义知 $\eta \in L_\infty^2$. 由式(9)的第 n 个方程知 $\dot{z}_n \in L_\infty^1$,由引理 2 知 $z_n \to 0$. 由式(9)的最后一个方程及对 M 的假设知 $\dot{\tilde{v}} \in L_\infty^2$,由引理 2 知 $\tilde{v} \to 0$. 对 $\eta_1^2 z_n$ 求导,由式(9)和式(8)知 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\eta_1^2 z_n) = -k_{n-2}\eta_1^3 z_{n-1} + (2\eta_1\dot{\eta}_1 z_n - \mu_2\eta_1^2 z_n + \eta_1^2 L_{h_1} z_n \tilde{v}_1 + \eta_1^2\tilde{v}_2)$,其中第一项一致连续(因其导数有界),后几项趋于零,由引理 1 知 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\eta_1^2 z_n) \to 0$. 因而 $\eta_1^3 z_{n-1}$ 和 $\eta_1 z_{n-1}$ 趋于零. 对 $\eta_1^2 z_{n-1}$ 求导,有 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\eta_1^2 z_{n-1}) = -K_{n-3}\eta_1^3 z_{n-2} + [2\eta_1\dot{\eta} z_{n-1} + \eta_1^2(-k_{n-3}\tilde{v}_1 z_{n-2} + \tilde{v}_1 z_n) + \eta_1^3 z_n]$,其中第一项一致连续,后几项趋于零,由引理 1 知 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\eta_1^2 z_{n-1}) \to 0$,于是 $\eta_1^3 z_{n-2}$ 和 $\eta_1 z_{n-2}$ 趋于零. 依次对 $\eta_1^2 z_j(j = n-2,\cdots,2)$ 求导,重复上述过程可证 $\eta_1 z_j \to 0(j = n-1,\cdots,2)$. 注意到方程(9),则有 η_2 和 $\dot{z}_i(2 \leqslant i \leqslant n)$ 趋于零. 对 $\eta_1 z_j(2 \leqslant j \leqslant n-1)$ 求导,有 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\eta_1 z_j) = z_j\dot{h}(z_2,\cdots,z_n,t) + (\eta_1\dot{z}_j - \mu_1\eta_1 z_j - \mu_1\tilde{v}_1 z_j)$,其中第一项一致连续,后几项趋于零,由引理 1 知 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\eta_1 z_j) \to 0$,所以 $z_j\dot{h} \to 0(2 \leqslant j \leqslant n-1)$. 再由定理假设知 $z_j \to 0(2 \leqslant j \leqslant n-1)$,且 $h(z_2,\cdots,z_n,t) \to 0$. 由 $\tilde{v}$ 和 $h(z_2,\cdots,z_n,t)$ 趋于零,可知 $z_1 \to 0$,因而 $\eta \to 0$ 和 $v \to 0$. 于是, z 和 v 分别渐近趋于零.

注 1　控制律(7)中的 η 依赖于函数 $h(z_2,\cdots,z_n,t)$ 的选取,如下三个函数满足定理中要求的条件

$$\sin(d_1 t)\sum_{j=2}^{n} c_j z_j^2;\ \sum_{j=2}^{n} a_j \sin(d_j t) z_j;$$

$$\sum_{j=2}^{n} a_j \frac{\exp(b_j z_j) - 1}{\exp(b_j z_j) + 1}\sin(d_j t).$$

其中 $c_j > 0, a_j \neq 0, b_j \neq 0, d_j \neq 0$,且 $d_i \neq d_j$(当 $i \neq j$ 时).

注 2 对应于原系统(5)和(4)的控制律,通过简单的反变换可以得到.

3 在移动机器人中的应用(Application to mobile robot)

考虑文献[3]中的刚性移动机器人,由第二部分推导过程不难得到其标准形如下:

$$\dot{z}_1 = v_1,\ \dot{z}_2 = z_3 v_1,\ \dot{z}_3 = v_2,$$

$$M_2(z)\dot{v} + C_2(z,\dot{z})v + G_2 = B_2(x)\tau,$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} I_0 + m z_2^2 & m z_2 \\ m z_2 & m \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} M z_2 \dot{z}_2 & 0 \\ m\dot{z}_2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \frac{1}{R}\begin{bmatrix} z_2 + L & z_2 - L \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, G_2 = 0.$$

相应地, $a = [m, I_0]^{\mathrm{T}}$, $Y_2(z,\dot{z},\xi,\dot{\xi}) = \begin{bmatrix} z_2^2\dot{\xi}_1 + z_2\dot{\xi}_2 + z_2\dot{z}_2\xi_1 & \dot{\xi}_1 \\ z_2\dot{\xi}_1 + \dot{\xi}_2 + \dot{z}_2\xi_1 & 0 \end{bmatrix}$. 令 $\eta = [\eta_1, \eta_2]^{\mathrm{T}}, \eta_1 = -\mu_1 z_1 + z_2^2\sin(t)$, $(\mu_1 > 0), \eta_2 = -\mu_2 z_3 - k_1 z_2 \eta_1, (\mu_2 > 0), \Lambda = [k_1 z_2 z_3, z_3]^{\mathrm{T}}$, u 为定理1中所定义.则控制律(7)可镇定 z 和 v 到零点.通过简单的反变换,不难把上述控制律变换为用原系统变量表示,略.

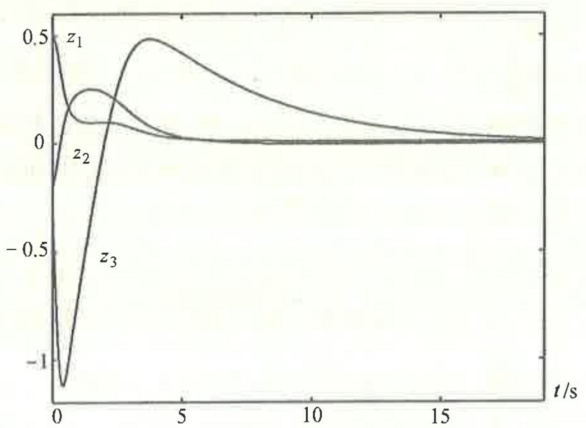

图 1 z_1, z_2 和 z_3 的响应曲线
Fig. 1 Responses of z_1, z_2 and z_3

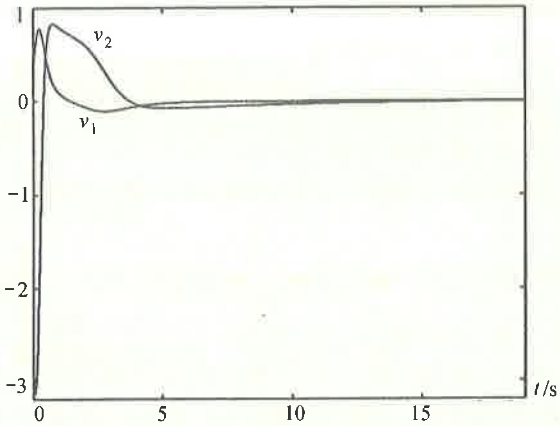

图 2 v_1 和 v_2 的响应曲线
Fig. 2 Responses of v_1 and v_2

仿真中,为简单取 $a = [0.5, 0.5]^{\mathrm{T}}, a_0 = [0.4, 0.7]^{\mathrm{T}}, \rho = 0.3, R = L = 1. \mu_1 = 0.3, \mu_2 = 0.2, k_1 = 100, k_p = \mathrm{diag}(50,50)$.设 $z_1(0) = -0.2$, $z_2(0) = 0.5, z_3(0) = -0.3, v_1(0) = 0.56, v_2(0) = -2.74$.图1和2分别给出了状态 z_1, z_2, z_3 和 v_1, v_2 的响应曲线.

4 结论(Conclusion)

本文讨论了一类非完整动力学系统的鲁棒镇定问题,设计了时变的鲁棒镇定律.该镇定律克服了自适应镇定律计算量较大的缺点.

参考文献(References)

1 Wenjie Dong and Wei Huo. Adaptive stabilization of dynamic nonholonomic chained systems with uncertainty. IEEE Proc. of Int. Conf. on Decision and Control, USA, 1997, 2362 – 2367

2 Murray R M. Control of nonholonomic systems using chained form. Fields Institute Communications, 1993, 1(1): 219 – 245

3 Campion G, d'Andrea-Novel B and Bastin G. Controllability and state feedback stabilization of nonholonomic mechanical systems. Advanced Robot Control. C. Canudas de Wit, Eds, Springer, 1991, 106 – 124

本文作者简介

董文杰 见本刊 1999 年第 3 期第 328 页.

霍 伟 见本刊 1999 年第 3 期第 328 页.