参数不确定系统的 H_∞ 滤波器
——基于代数 Riccati 不等式的判据与设计方案 *

张 明
(国防科技大学自动控制系·长沙,410073)
施鼎汉
(厦门大学自动化系·厦门,361005)

摘要: 利用代数 Riccati 不等式技术,给出了参数不确定系统的 H_∞ 滤波器设计方案;还给出卡尔曼滤波器是否使参数不确定系统满足 H_∞ 性能指标的充分条件.

关键词: H_∞ 滤波器; 代数 Riccati 不等式; Kalman 滤波器; 参数不确定系统

H_∞ Filter for Uncertain Parameter System
——A Criterion and Design Method Based on Algebraic Riccati Inequality

Zhang Ming
(Department of Automatic Control, National University of Defense Technology·Changsha, 410073, P.R.China)
Shi Dinghan
(Department of Automation, Xiamen University· Xiamen, 361005, P.R.China)

Abstract: Using the technique of algebraic inequality, we not only can design H_∞ filter for uncertain parameter system, but also can give the sufficient condition if Kalman filter makes uncertain parameter system satisfy H_∞ performance index.

Key words: H_∞ filter; algebraic Riccati inequality; Kalman filter; uncertain parameter system

1 问题的描述与分析(Statement and analysis of the problems)

考虑连续时间域上的不确定系统 G

$$\dot{X}(t) = (A+\Delta A)X(t) + B\omega(t), \tag{1}$$
$$Y(t) = (C+\Delta C)X(t) + D\omega(t), \tag{2}$$
$$Z(t) = LX(t). \tag{3}$$

设
$$\begin{pmatrix}\Delta A\\ \Delta C\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}H_1\\ H_2\end{pmatrix}FE, \tag{4}$$

其中 A, B, C, D, E, H_1, H_2 为常阵, F 为摄动, 且 $F^{\mathrm T}F \leqslant I$.

设计线性滤波器 M:

$$\dot{\hat{X}}(t) = A_e\hat{X}(t) + K_eY(t), \tag{5}$$
$$\hat{Z}(t) = L_e\hat{X}(t), \tag{6}$$

使传递函数 $T(s): \omega \to e(= Z - \hat{Z})$ 满足

$$\| T(s) \|_\infty < \gamma, \tag{$*$}$$

其中

$$\begin{cases} T(s) = C_c[sI - (A_c + H_cFE_c)]^{-1}B_c, \\ A_c = \begin{bmatrix} A & 0 \\ K_eC & A_e \end{bmatrix}, B_c = \begin{bmatrix} B \\ K_eD \end{bmatrix}, \\ H_c = \begin{bmatrix} H_1 \\ K_eH_2 \end{bmatrix}, C_c = [L \ \ -L_e], E_c = [E \ \ 0]. \end{cases} \tag{7}$$

为了克服 $T(s)$ 中有未知矩阵的困难,王正志等人在文献[1]引入带有正参数 δ 的系统 G_δ:

$$\dot{\bar{X}} = A\bar{X} + [B \quad \gamma\delta^{-1}H_1]\bar{\omega}, \tag{8}$$
$$\bar{Y} = C\bar{X} + [D \quad \gamma\delta^{-1}H_2]\bar{\omega}, \tag{9}$$
$$\bar{Z} = \begin{bmatrix} L \\ \delta E \end{bmatrix}\bar{X}. \tag{10}$$

采用滤波器 $M((5),(6))$, 用 $\bar{Z}_e = \begin{bmatrix} Z_e \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_e \\ 0 \end{bmatrix}\hat{X}$ 估计 $\bar{Z}$, G_δ 被滤波器 M 估计,其误差传递函数 $T_\delta(s): \bar{\omega} \to \bar{e}(= \bar{Z} - \bar{Z}_e)$ 满足:

$$T_\delta(s) = \begin{bmatrix} C_c \\ \delta E_c \end{bmatrix}(sI - A_c)[B_c \quad \gamma\delta^{-1}H_c]. \tag{11}$$

并有如下结论(见参考文献[1]的定理 1):

$$\| T_\delta(s) \|_\infty < \gamma, \tag{$**$}$$

则对于原来的参数不确定系统 G,该滤波器 M 产生的估计误差传递函数 $T(s)$ 满足($*$)式.

为了讨论卡尔曼滤波器是否满足 H_∞ 性能指标的问题,我们特别关心一类滤波器 M': $M((5)(6))$ 中的参数满足

* 福建省自然科学基金(F97002)资助项目.
本文于 1997 年 3 月 3 日收到. 1999 年 1 月 19 日收到修改稿.

$$K_e = K,\ L_e = L,\ A_e = A - KC. \tag{12}$$

这时

$$T_\delta(s) = \begin{bmatrix} L & -L \\ \delta E & 0 \end{bmatrix}\left(sI - \begin{bmatrix} A & 0 \\ KC & A-KC \end{bmatrix}\right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} B & \gamma\delta^{-1}H_1 \\ KD & \gamma\delta^{-1}KH_2 \end{bmatrix}.$$

引入线性变换 $T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix}$,可得:

$$T_\delta(s) = \begin{bmatrix} 0 & -L \\ \delta E & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (sI-A)^{-1} & 0 \\ 0 & (sI-A+KC)^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B & \gamma\delta^{-1}H_1 \\ B-KD & \gamma\delta^{-1}(H_1-KH_2) \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} L(sI-A+KC)^{-1}(B-KD & \gamma\delta^{-1}(H_1-KH_2)) \\ E(sI-A)^{-1}(\delta B & \gamma H_1) \end{bmatrix}.$$

考虑到策动噪声源与测量噪声源不同,应考查如下模型 G':

$$\dot{X}(t) = (A+\Delta A)X(t) + B_1\omega_1(t), \tag{1'}$$

$$Y(t) = (C+\Delta C)X(t) + v(t), \tag{2'}$$

并设

$$Z(t) = X(t), \tag{3'}$$

若取 $B = [B_1\ \ 0], D = [0\ \ I], \omega = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ v \end{bmatrix}, L = I$,那么模型 G' 可以归结为模型 G.如果(A,B_1)能控,(A,C)能观,且 $\omega_1(t),v(t)$ 为互不相关的高斯白噪声,进一步:

$\mathrm{cov}[\omega(t),\omega(\tau)] = Q\cdot\delta(t-\tau)$,

$\mathrm{cov}[v(t),v(\tau)] = R\cdot\delta(t-\tau)(Q\geqslant 0, R>0)$.

那么代数 Riccati 方程 $AP + PA^{\mathrm T} + B_1QB_1^{\mathrm T} - PC^{\mathrm T}R^{-1}CP = 0$ 有正定解 P_1,取 $K_1 = P_1C^{\mathrm T}R^{-1}$,使滤波器 M' 为 G' 的标称系统($\Delta A = 0, \Delta C = 0$)的卡尔曼滤波器.

本文感兴趣的问题是:1) 滤波器 M' 使参数不确定系统 G 满足($*$)式的条件是什么? 2) 标称系统($\Delta A = 0, \Delta C = 0$)的卡尔曼滤波器 $M'(K_1 = P_1C^{\mathrm T}R^{-1})$ 在什么条件下使参数不确定系统 G 满足($*$)式?

2 基本引理及主要结果(Basic lemma and main results)

引理 1[2] 如果代数 Riccati 不等式

$$A^{\mathrm T}P + PA + \gamma^{-2}PBB^{\mathrm T}P + C^{\mathrm T}C < 0, \tag{13}$$

或

$$PA^{\mathrm T} + AP + \gamma^{-2}PC^{\mathrm T}CP + BB^{\mathrm T} < 0 \tag{14}$$

有正定解 $P>0$,那么 A 稳定,且 $\|C(sI-A)^{-1}B\|_\infty \leqslant \gamma$.

证 由代数 Riccati 不等式(13)有正定解 $P>0$ 可知:$\exists Q>0$,代数 Riccati 方程

$$A^{\mathrm T}P + PA + \gamma^{-2}PBB^{\mathrm T}P + C^{\mathrm T}C + Q = 0$$

有正定解 $P>0$.

因而 $A^{\mathrm T}P + PA < 0$,即 A 稳定;令 $K = -\gamma^{-1}P$,可得:

$$A^{\mathrm T}K + KA - \gamma^{-1}KBB^{\mathrm T}K - \gamma^{-1}(C^{\mathrm T}C + Q) = 0.$$

利用文献[3,引理1],可得

$$\gamma I - B^{\mathrm T}(-\mathrm{j}\tilde{\omega}I - A^{\mathrm T})^{-1}\left(\frac{C^{\mathrm T}C+Q}{\gamma}\right)(\mathrm{j}\tilde{\omega}I - A)^{-1}B \geqslant 0.$$

即

$$B^{\mathrm T}(-\mathrm{j}\tilde{\omega}I - A^{\mathrm T})^{-1}C^{\mathrm T}C(\mathrm{j}\tilde{\omega}I - A)^{-1}B \leqslant$$
$$\gamma^2 I - B^{\mathrm T}(-\mathrm{j}\tilde{\omega}I - A^{\mathrm T})^{-1}Q(\mathrm{j}\tilde{\omega}I - A)^{-1}B \leqslant \gamma^2 I,$$

故

$$\|C(sI-A)^{-1}B\|_\infty \leqslant \gamma.$$

另外由对偶性可知:当(14)式有正定解 $P>0$ 时,结论也成立.

引理 2

$$\left\|\begin{matrix} G_1 \\ G_2 \end{matrix}\right\|_\infty^2 \leqslant 2(\|G_1\|_\infty^2 + \|G_2\|_\infty^2). \tag{15}$$

证 令 $Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} v$,并参考文献[4],有:

$$\left\|\begin{matrix} G_1 \\ G_2 \end{matrix}\right\|_\infty^2 = \sup\frac{\|Y_1\|_2^2}{\|v\|_2^2} \leqslant 2\left(\sup\frac{\|Y_1\|_2^2}{\|v\|_2^2} + \sup\frac{\|Y_2\|_2^2}{\|v\|_2^2}\right) = 2(\|G_1\|_\infty^2 + \|G_2\|_\infty^2).$$

对于确定参数系统的 H_∞ 滤波器的设计问题,文献[5]给出了基于代数 Riccati 方程的设计方案,作者在文献[6]中给出了基于代数 Riccati 不等式的设计方案,并说明了在一定条件下,卡尔曼滤波器本身就是系统的 H_∞ 滤波器.而对于参数不确定系统的 H_∞ 滤波器的设计问题,文献[1]给出了基于两个代数 Riccati 方程的设计方案,并比较了中心解与卡尔曼滤波器的关系;本文则将给出基于一个代数 Riccati 不等式的设计方案,并说明了在一定条件下,标称系统的卡尔曼滤波器本身就是不确定系统的 H_∞ 滤波器.

定理 1 如果 $\exists\delta > 0$,使

$$2\|E(sI-A)^{-1}[\delta\gamma^{-1}B\ \ H_1]\|_\infty < 1,$$

且代数 Riccati 不等式

$$(A - BD^{\mathrm T}C - \gamma^2\delta^{-2}H_1H_1^{\mathrm T}C)P + P(A - BD^{\mathrm T}C - \gamma^2\delta^{-2}H_1H_2^{\mathrm T}C)^{\mathrm T} + BB^{\mathrm T} - P(2C^{\mathrm T}C - 4\gamma^{-2}L^{\mathrm T}L - C^{\mathrm T}DD^{\mathrm T}C - \gamma^2\delta^{-2}C^{\mathrm T}H_2H_2^{\mathrm T}C)P + \gamma^2\delta^{-2}H_1H_1^{\mathrm T} < 0 \tag{16}$$

有正定解 P_0,那么取 $K_0 = P_0C^{\mathrm T}$,滤波器 M' 使参数不确定系统 G 满足(*)式.

证　由代数 Riccati 不等式(16)有正定解 P_0 及 $K_0 = P_0C^{\mathrm T}$ 整理可得:

代数 Riccati 不等式

$$(A - K_0C)P + P(A - K_0C)^{\mathrm T} + 4\gamma^{-2}PL^{\mathrm T}LP + [B - K_0D \quad \gamma\delta^{-1}(H_1 - KH_2)]\cdot[B - K_0D \quad \gamma\delta^{-1}(H_1 - KH_2)]^{\mathrm T} < 0 \tag{17}$$

有正定解 P_0.

由引理 1 可知:

$$\| L(sI - A)^{-1}[B - K_0D \quad \gamma\delta^{-1}(H_1 - KH_2)] \|_\infty < \gamma/2;$$

又

$$\| E(sI - A)^{-1}[\delta B \quad \gamma H_1] \|_\infty = \gamma \| E(sI - A)^{-1}[\delta\gamma^{-1}B \quad H_1] \|_\infty < \gamma/2.$$

因而由引理 2 及前文的分析可知:

$$\| T\delta(s) \|_\infty^2 = \left\| \begin{bmatrix} L(sI - A + KC)^{-1}(B - KD \quad \gamma\delta^{-1}(H_1 - KH_2)) \\ E(sI - A)^{-1}(\delta B \quad \gamma H_1) \end{bmatrix} \right\|_\infty^2 < 2\left(\frac{\gamma^2}{4} + \frac{\gamma^2}{4}\right) = \gamma^2.$$

故(* *)式成立,(*)式也成立,定理得证.

注 1　从定理 1 的条件 $2\| E(sI - A)^{-1}[\delta\gamma^{-1}B \quad H_1] \|_\infty < 1$ 可知,标称系统需稳定,我们才可能依据本定理设计参数不确定系统的 H∞ 滤波器.

注 2　从目前处理参数不确定系统的技术手段来看,我们只可能得到充分条件(二次镇定的充要条件也只是鲁棒稳定的充分条件).

对于问题 2),注意到:在这种情况下,

$$T_\delta(s) = \begin{bmatrix} L(sI - A + K_1C)^{-1}(B_1 \quad -K_1 \quad \gamma\delta^{-1}(H_1 - K_1H_2)) \\ E(sI - A)^{-1}(\delta B \quad 0 \quad \gamma H_1) \end{bmatrix},$$

因而可得如下结果:

定理 2　设 (A, B_1) 能控,(A, C) 能观,且 $\omega_1(t), v(t)$ 为互不相关的高斯白噪声,进一步:

$\mathrm{cov}[\omega(t), \omega(\tau)] = Q \cdot \delta(t - \tau)$,

$\mathrm{cov}[v(t), v(\tau)] = R \cdot \delta(t - \tau)(Q \geqslant 0, R > 0)$.

如果 $\exists \delta > 0$,使 $2\| E(sI - A)^{-1}[\delta\gamma^{-1}B_1 \quad 0 \quad H_1] \|_\infty < 1$,且不等式

$$(A - \gamma^2\delta^{-2}H_1H_2^{\mathrm T}R^{-1}C)P_1 + P_1(A - \gamma^2\delta^{-2}H_1H_2^{\mathrm T}R^{-1}C)^{\mathrm T} + B_1B_1^{\mathrm T} + \gamma^2\delta^{-2}H_1H_1^{\mathrm T} - P_1(2C^{\mathrm T}R^{-1}C - 4\gamma^{-2}L^{\mathrm T}L - C^{\mathrm T}R^{-2}C - \gamma^2\delta^{-2}C^{\mathrm T}R^{-1}H_2H_2^{\mathrm T}R^{-1}C)P_1 < 0 \tag{18}$$

成立,其中 P_1 是代数 Riccati 方程 $AP + PA^{\mathrm T} + B_1QB_1^{\mathrm T} - PC^{\mathrm T}R^{-1}CP = 0$ 的正定解,取 $K_1 = P_1C^{\mathrm T}R^{-1}$,则卡尔曼滤波器 M' 使参数不确定系统 G' 满足(*)式.

证　由题设整理可得:P_1 是代数 Riccati 不等式

$$(A - K_1C)P + P(A - K_1C)^{\mathrm T} + 4\gamma^{-2}PL^{\mathrm T}LP + [B_1 \quad -K_1 \quad \gamma\delta^{-1}(H_1 - K_1H_2)]\cdot[B_1 \quad -K_1 \quad \gamma\delta^{-1}(H_1 - K_1H_2)]^{\mathrm T} < 0 \tag{19}$$

的正定解.

与定理 1 的证明类似,可得:

$$\| T_\delta(s) \|_\infty^2 = \left\| \begin{bmatrix} L(sI - A + K_1C)^{-1}(B_1 \quad -K_1 \quad \gamma\delta^{-1}(H_1 - K_1H_2)) \\ E(sI - A)^{-1}(\delta B \; 0 \; \gamma H_1) \end{bmatrix} \right\|_\infty^2 < \gamma^2. \tag{20}$$

注 3　从定理 2 可知,在一定条件下,标称系统的卡尔曼滤波器本身就是不确定系统的 H∞ 滤波器,因而利用代数 Riccati 不等式技术,可以从另一个不同于文献[1]的角度来考察卡尔曼滤波器与 H∞ 滤波器的关系。

注 4　判断卡尔曼滤波器本身是否是不确定系统的 H∞ 滤波器,关键在于能否找到 $\delta > 0$,使(20)式成立.定理 2 的条件只是使(20)式成立的充分条件.

为了说明本文结果的有效性,特给出一个实例.

实例 1　参数不确定系统 G' 模型参数选取如下:

$$A = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 1 & -8.75 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, C = [2 \quad 1],$$

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, R = 2, H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$H_2 = [0.2 \quad 0.1], E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

解　显然 (A, B_1) 能控,(A, C) 能观,且 $P_1 =$

I_2是 $AP + PA^{\mathrm{T}} + B_1QB_1^{\mathrm{T}} - PC^{\mathrm{T}}R^{-1}CR = 0$ 的正定解，$M'(K_1 = P_1C^{\mathrm{T}}R^{-1})$ 即是卡尔曼滤波器.

对于 $\gamma = 1$，选取 $\delta = 1$ 不难验证：

$$AP_1 + P_1A^{\mathrm{T}} + \delta^2\gamma^{-2}B_1B_1^{\mathrm{T}} + H_1H_1^{\mathrm{T}} + 4.01P_1E^{\mathrm{T}}EP_1 = \begin{bmatrix} -1.99 & 1.01 \\ 1.01 & -3.48 \end{bmatrix} < 0. \tag{21}$$

$$(18)\text{式左边} = \begin{bmatrix} -5.35 & -0.595 \\ -0.595 & -4.1075 \end{bmatrix} < 0. \tag{22}$$

由(21)式及引理1可知：

$$2\| E(sI - A)^{-1}[\delta\gamma^{-1}B_1 \quad 0 \quad H_1]\|_\infty < 1.$$

故定理2的条件满足，卡尔曼滤波器 M' 使参数不确定系统 G' 满足(＊)式.本实例说明了标称系统的卡尔曼滤波器可以是参数不确定系统的 H_∞ 滤波器.

3 结论(Conclusion)

利用代数 Riccati 不等式技术，本文给出了参数不确定系统的 H_∞ 滤波器设计方案以及卡尔曼滤波器满足 H_∞ 性能指标的简明判据.代数 Riccati 不等式技术的优点在于可以兼顾 H_∞ 性能指标与其它性能指标，并使我们可以从一个新的角度来考查卡尔曼滤波器与 H_∞ 滤波器的关系：卡尔曼滤波器本身就是参数不确定系统的 H_∞ 滤波器.

参考文献(References)

1 王正志，周宗潭，张良起.参数不确定系统的 H_∞ 估计问题的显示解与中心解.自动化学报，1997，23(1)：16－24

2 张明.Riccati 不等式与 H_∞ 优化及挠性航天器的鲁棒控制方案：[硕士学位论文].厦门：厦门大学，1994

3 Willems J C. Least squares stationary optimal control and the algebraic equation. IEEE Trans. Automat. Contr., 1971, 16(4): 621－634

4 Francis B A. A Course in H_∞ Control Theory. New York: Springer-Verlag, 1987

5 Nagpal K M and Khargonekar P P. Filtering and smoothing in H_∞ setting. IEEE. Trans. Automat. Contr., 1991, 36(2): 152－166

6 张明，施鼎汉.代数 Riccati 不等式与 H_∞ 滤波器.厦门大学学报(自然科学版)，1997，36(6)：825－828

本文作者简介

张 明 1970年生.分别于1991年，1994年获得厦门大学控制科学专业学士，运筹学与控制论专业理学硕士学位.现为国防科技大学自动控制系讲师.主要研究方向是：鲁棒控制，现代滤波理论在航天测控中的应用，工程可靠性理论等.

施鼎汉 1940年生.1963年毕业于厦门大学数学系.1982年至1984年在美国纽约理工大学电气工程系作访问学者.现为厦门大学自动化系教授，主任.主要研究方向是：随机控制，鲁棒控制，控制理论在经济、社会领域中的应用.

我国研制的无模型控制器已形成了系列产品

依据韩志刚教授1993年提出的无模型控制律(Non-Modelling or Direct Adaptive Control)所设计的无模型控制器于1995年形成了工业化系列产品，现由哈尔滨德维自动化设备开发公司与西安石油勘探仪器总厂联合生产.该系列控制器无需建立被控对象的数学模型，基本参数一经给定以后无需改变.对非线性、大时滞、强耦合、时变系统的控制，有其特殊的功效.该产品的用户已遍及到炼油、化工、焦碳、化肥、造纸、电力等行业.现在在大范围推广.