第 16 卷第 5 期
1999 年 10 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol.16, No.5
Oct., 1999

汽车四轮转向(4WS)的二自由度鲁棒控制器设计

胡立生　孙优贤
(浙江大学工业自动化国家重点实验室·杭州,310027)

李幼德
(吉林工业大学汽车工程学院汽车系·长春,130025)

摘要: 四轮转向控制器的传统设计没有考虑汽车参数在运行过程中的变化,这样得到的控制器往往难以维持其原有设计性能指标.采用鲁棒控制理论,提出了二自由度鲁棒控制器设计方法,鲁棒控制器的设计归结为一个线性矩阵不等式的求解.最后给出了一个计算实例.

关键词: 汽车四轮转向控制; 鲁棒控制; H_∞ 控制

2DOF Robust Controller for Four Wheel Steering Systems of Automobile

Hu Lisheng　and　Sun Youxian
(National laboratory of Industrial Control Technology, Zhejiang University·Hangzhou, 310027, P.R.China)

Li Youde
(Institute of Automobile Engineering, Jilin University of Technology·Changchun, 130025, P.R.China)

Abstract: The primary disadvantage of current design techniques for 4WS controller is their inability to deal with parametric perturbation caused by automobile moving, which degrades the performance of closed-loop systems. In this paper we present a design procedure of two degree of freedom of robust controller for 4WS car. The robust controller can be obtained by solving a linear matrix inequality which can be solved using Matlab LMItool efficiently. Finally, a numerical example is given to illustrate effectiveness of proposed design procedure.

Key words: four wheel steering control of automobile; robust control; H_∞ control

1 引言(Introduction)

四轮转向技术作为提高汽车操纵稳定性的有效手段已得到了广泛的认可[1,2].众所周知,汽车在行驶过程中,很多情况下行驶速度是变化的,而且轮胎负荷、路面附着状况和切向力等都是变化的,从而轮胎的侧偏特性也在发生变化,此时汽车的转向特性应由一包含这些参数不确定性的力学模型来描述.而转向控制器的传统设计常依赖于一个确定性模型,即假定模型的参数在汽车的运行过程中是不变的,因此传统方法设计的控制器,在实际运用时,性能往往难以达到原设计要求,甚至使系统不稳定[3].考虑到由汽车行驶状态和路面状况变化而引入的车速和轮胎侧偏刚度的不确定性,以及后轮转向是由前轮的转向和汽车的状态决定,本文将采用鲁棒控制理论设计汽车的二自由度鲁棒四轮转向控制器,即前馈控制器加反馈控制器,并与传统零侧偏角控制器进行比较.

2 线性不确定汽车模型的建立(Linear uncertain vehicle modeling)

研究汽车操纵稳定性可以采用如下二自由度汽车动力学模型:

$$MV(\dot{\beta} + r) = Y_f + Y_r, \tag{1}$$

$$I_z \dot{r} = aY_f - bY_r. \tag{2}$$

其中前后轮侧偏力分别为: $Y_f = -k_f(\beta + \frac{a}{V}r - \delta_f)$, $Y_r = -k_r(\beta - \frac{b}{V}r - \delta_r)$,此处 δ_f 和 δ_r 分别是前轮和后轮的转向角,其他符号在汽车理论中是标准的,除非易引起混淆,一般不作特别说明.在汽车运行过程中,上述汽车动力学模型中如汽车的行驶速度 V 和前后轮胎的侧偏刚度是变化的.那么上述运动方程转化为不确定状态方程描述后,可以得到如下状态方程(3),其中 A_0, B_{f0} 和 B_{r0} 对应于标称工况点.考虑到采用所谓中性转向原则来设计四轮转向的控制机构,即质心处的侧偏角 β 作为系统的性能评价参数,而 r 是系统的量测输出.那么四轮转向控制器的设计归结为如下系统:

$$\Sigma_1:\ \dot{x} = (A_0 + \sum_{i=1}^{s}\delta_i A_i)x + (B_{r0} + \sum_{i=1}^{s}\delta_i B_{ri})\delta_r + (B_{f0} + \sum_{i=1}^{s}\delta_i B_{fi})\delta_f, \tag{3}$$

本文于 1997 年 7 月 7 日收到. 1998 年 8 月 27 日收到修改稿.

$$z = C_1 x + D_1\delta_f + D_2\delta_r, \tag{4}$$

$$y = C_2 x, \tag{5}$$

与二自由度鲁棒控制器

$$\delta_r = K_2\delta_f + K_1(s)y \tag{6}$$

组成的闭环系统的鲁棒 H_∞ 问题 $\|z\|_2 < \gamma\|\delta_f\|_2$. 其中 δ_i 为参数不确定量,满足 $|\delta_i| \leqslant \alpha_i$, $i = 1,2,\cdots,s$. 并约定: δ_1 和 δ_2 表示前后轮胎侧偏刚度的不确定量; δ_3 表示车速的不确定量. 若 $K_1(s)$ 使用动态控制器,则式(6)可以表示为:

$$\dot{x}_c = A_c x_c + B_c y,\ \delta_r = C_c x_c + K_2\delta_f, \tag{7}$$

其中 A_c, B_c, C_c 和 K_2 是适维矩阵.

3 鲁棒控制器的设计(Robust controller design)

考虑由系统 Σ_1 和二自由度一阶控制器(7)构成的闭环系统:

$$\Sigma_c:\begin{cases}\dot{\tilde{x}} = \left(\tilde{A}_0 + \sum\limits_{i=1}^{s}\delta_i\tilde{A}_i\right)\tilde{x} + \left(\tilde{B}_{f0} + \sum\limits_{i=1}^{s}\delta_i\tilde{B}_{fi}\right)\delta_f,\\ \quad |\delta_i| \leqslant \alpha_i,\ i = 1,2,\cdots,s,\\ z(t) = \tilde{C}_1\tilde{x}(t) + \tilde{D}_1\delta_f,\end{cases} \tag{8}$$

其中:

$\tilde{x} = (x, x_c)^{\mathrm T}$,

$\tilde{A}_0 = \bar{A}_0 + \bar{B}_{r0}\bar{K}_1\bar{C}_2$, $\tilde{A}_i = \bar{A}_i + \bar{B}_{ri}\bar{K}_1\bar{C}_2$,

$\tilde{B}_{f0} = \bar{B}_{f0} + \bar{B}_{r0}\bar{K}_2$, $\tilde{B}_{fi} = \bar{B}_{fi} + \bar{B}_{ri}\bar{K}_2$,

$\tilde{C}_1 = \bar{C}_1 + \bar{D}_2\bar{K}_1\bar{C}_2$, $\tilde{D}_1 = D_1 + \bar{D}_2\bar{K}_2$,

$$\bar{A}_0 = \begin{bmatrix} A_0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ \bar{B}_{r0} = \begin{bmatrix} 0 & B_{r0}\\ I & 0\end{bmatrix},$$

$$\bar{K}_1 = \begin{bmatrix} A_c & B_c\\ C_c & 0\end{bmatrix},\ \bar{C}_2 = \begin{bmatrix} 0 & I\\ C_2 & 0\end{bmatrix},\ \bar{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$\bar{B}_{ri} = \begin{bmatrix} 0 & B_{ri}\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ \bar{B}_{f0} = \begin{bmatrix} B_{f0}\\ 0\end{bmatrix},\ \bar{B}_{fi} = \begin{bmatrix} B_{fi}\\ 0\end{bmatrix},$$

$$\bar{K}_2 = \begin{bmatrix} 0\\ K_2\end{bmatrix},\ \bar{D}_2 = [0\ \ D_2],\ \bar{C}_1 = [C_1\ \ 0].$$

定理 1 考虑系统 Σ_1 和二自由度控制器(7)构成的闭环系统 Σ_c, 若存在矩阵 $Q = Q^{\mathrm T} > 0$, $S_i = S_i^{\mathrm T} > 0$ 和 $T_i = -T_i^{\mathrm T}$, 而 $Q, S_i, T_i \in \mathbb{R}^{n+n_c\times n+n_c}$, $i = 1,2,\cdots,s$, 满足下列线性矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_0Q + Q\tilde{A}_0^{\mathrm T} + \sum\limits_{i=1,s}\alpha_i^2 S_i & \tilde{A}_1Q - T_1 & \cdots & \tilde{A}_sQ - T_s & \tilde{B}_{f0} & Q\tilde{C}_1^{\mathrm T}\\ Q\tilde{A}_1^{\mathrm T} + T_1 & -S_1 & \cdots & 0 & \tilde{B}_{f1} & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ Q\tilde{A}_s^{\mathrm T} + T_s & 0 & \cdots & -S_s & \tilde{B}_{fs} & 0\\ \tilde{B}_{f0}^{\mathrm T} & \tilde{B}_{f1}^{\mathrm T} & \cdots & \tilde{B}_{fs}^{\mathrm T} & -I & \tilde{D}_1^{\mathrm T}\\ \tilde{C}_1Q & 0 & \cdots & 0 & \tilde{D}_1 & -\gamma^2 I\end{bmatrix} < 0. \tag{9}$$

由系统 Σ_c 满足带 H_∞ 增益小于 γ 的鲁棒稳定.

证 为书写方便,记 $R = I - \tilde{D}_1\tilde{D}_1^{\mathrm T}$, 不失一般性,设 $\gamma = 1$. 由正实引理,系统 Σ_c 满足带 H_∞ 指标鲁棒稳定的充要条件是:存在矩阵 $Q = Q^{\mathrm T} > 0$, 满足下式:

$$\left(\tilde{A}_0 + \sum_{i=1}^{s}\delta_i\tilde{A}_i\right)Q + Q\left(\tilde{A}_0 + \sum_{i=1}^{s}\delta_i\tilde{A}_i\right)^{\mathrm T} + \left(\tilde{B}_{f0} + \sum_{i=1}^{s}\delta_i\tilde{B}_{fi}\right)\left(\tilde{B}_{f0} + \sum_{i=1}^{s}\delta_i\tilde{B}_{fi}\right)^{\mathrm T} + \left[\left(\tilde{B}_{f0} + \sum_{i=1}^{s}\delta_i\tilde{B}_{fi}\right)\tilde{D}_1^{\mathrm T} + Q\tilde{C}_1^{\mathrm T}\right]R^{-1}\left[\left(\tilde{B}_{f0} + \sum_{i=1}^{s}\delta_i\tilde{B}_{fi}\right)\tilde{D}_1^{\mathrm T} + Q\tilde{C}_1^{\mathrm T}\right]^{\mathrm T} < 0.$$

对任意非零 x, 上述不等式等价于下列二次不等式:

$$x^{\mathrm T}\Big\{\left(\tilde{A}_0 + \sum_{i=1}^{s}\delta_i\tilde{A}_i\right)Q + Q\left(\tilde{A}_0 + \sum_{i=1}^{s}\delta_i\tilde{A}_i\right)^{\mathrm T} + \left(\tilde{B}_{f0} + \sum_{i=1}^{s}\delta_i\tilde{B}_{fi}\right)\left(\tilde{B}_{f0} + \sum_{i=1}^{s}\delta_i\tilde{B}_{fi}\right)^{\mathrm T} + \left[\left(\tilde{B}_{f0} + \sum_{i=1}^{s}\delta_i\tilde{B}_{fi}\right)\tilde{D}_1^{\mathrm T} + Q\tilde{C}_1^{\mathrm T}\right]R^{-1}\left[\left(\tilde{B}_{f0} + \sum_{i=1}^{s}\delta_i\tilde{B}_{fi}\right)\tilde{D}_1^{\mathrm T} + Q\tilde{C}_1^{\mathrm T}\right]^{\mathrm T}\Big\}x < 0.$$

令 $y_i = \delta_i x$, 上述不等式等价于存在矩阵 S_i 和 T_i, $i = 1,2,\cdots,s$, 使得[4]:

$$x^{\mathrm T}(\tilde{A}_0Q + Q\tilde{A}_0^{\mathrm T})x + \sum_{i=1}^{s}(x^{\mathrm T}\tilde{A}_iQy_i + y_i^{\mathrm T}Q\tilde{A}_i^{\mathrm T}x) + \left(x^{\mathrm T}\tilde{B}_{f0} + \sum_{i=1}^{s}y_i^{\mathrm T}\tilde{B}_{fi}\right)\left(x^{\mathrm T}\tilde{B}_{f0} + \sum_{i=1}^{s}y_i^{\mathrm T}\tilde{B}_{fi}\right)^{\mathrm T} + \left[\left(x^{\mathrm T}\tilde{B}_{f0} + \sum_{i=1}^{s}y_i^{\mathrm T}\tilde{B}_{fi}\right)\tilde{D}_1^{\mathrm T} + x^{\mathrm T}Q\tilde{C}_1^{\mathrm T}\right]R^{-1}\left[\left(x^{\mathrm T}\tilde{B}_{f0} + \sum_{i=1}^{s}y_i^{\mathrm T}\tilde{B}_{fi}\right)\tilde{D}_1^{\mathrm T} + x^{\mathrm T}Q\tilde{C}_1^{\mathrm T}\right]^{\mathrm T} < 0,$$

$$y_i^{\mathrm T}S_iy_i \leqslant \alpha_i^2x^{\mathrm T}S_ix,\ y_i^{\mathrm T}T_ix = 0.$$

由 S 过程(S-Procedure),上述不等式成立的条件是存在 $\tau_i > 0$, $\beta_i > 0$, $i = 1,2,\cdots,s$, 使得

$$x^{\mathrm T}(\tilde{A}_0Q + Q\tilde{A}_0^{\mathrm T})x + \sum_{i=1}^{s}(x^{\mathrm T}\tilde{A}_i^{\mathrm T}Qy_i + y_i^{\mathrm T}Q\tilde{A}_i^{\mathrm T}x) + (x^{\mathrm T}\tilde{B}_{f0} + \sum_{i=1}^{s}y_i^{\mathrm T}\tilde{B}_{fi})(x^{\mathrm T}\tilde{B}_{f0} + \sum_{i=1}^{s}y_i^{\mathrm T}\tilde{B}_{fi})^{\mathrm T} + [(x^{\mathrm T}\tilde{B}_{f0} + \sum_{i=1}^{s}y_i^{\mathrm T}\tilde{B}_{fi})\tilde{D}_1^{\mathrm T} + x^{\mathrm T}Q\tilde{C}_1^{\mathrm T}]R^{-1}[(x^{\mathrm T}\tilde{B}_{f0} + \sum_{i=1}^{s}y_i^{\mathrm T}\tilde{B}_{fi})\tilde{D}_1^{\mathrm T} + x^{\mathrm T}Q\tilde{C}_1^{\mathrm T}]^{\mathrm T} + \sum_{i=1}^{s}\tau_i(\alpha_i^2x^{\mathrm T}S_ix - y_i^{\mathrm T}S_iy_i) +$$

$$2\sum_{i=1}^{s}\beta_i y_i^{\mathrm{T}} T_i x < 0, (x, y_1, y_2, \cdots, y_s)^{\mathrm{T}} \neq 0.$$

若将 $\tau_i S_i$ 和 $\beta_i T_i$ 分别仍记为 S_i 和 T_i，则上式等价于线性矩阵不等式(9)成立.

采用 LMItool 可以方便地由矩阵不等式(9)，解得控制器 $K_1(s)$ 和 K_2 的参数.具体算法如下：

a) 求解系统 Σ_1 对应的标称系统的四轮转向控制器，若无解则停止.标称控制器可以由下式求得：

$$\tilde{A}_0 Q + Q\tilde{A}_0^{\mathrm{T}} + \tilde{B}_{f0}\tilde{B}_{f0}^{\mathrm{T}} + (\tilde{B}_{f0}\tilde{D}_{f0}^{\mathrm{T}} + Q\tilde{C}_1^{\mathrm{T}})(I - \tilde{D}_1\tilde{D}_1^{\mathrm{T}})^{-1}(\tilde{B}_{f0}\tilde{D}_1^{\mathrm{T}} + Q\tilde{C}_1^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} < 0.$$

b) 代入矩阵不等式(9)，求得矩阵 $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$，$S_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$，$T_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$，$i = 1, 2, \cdots, s$.

c) 代回上述不等式，求得控制器 $K_1(s)$ 和 K_2 参数.

d) 重复和直到收敛或求得满意的控制器.

4　四轮转向控制器的设计和仿真(4WS controller design and simulation)

考虑某典型汽车的二自由度鲁棒转向控制器的设计，设前后轮侧偏刚度的变动范围分别是 $\alpha_1 = 200(\mathrm{N/rad})$ 和 $\alpha_2 = 250(\mathrm{N/rad})$；而车速的变动范围设为 $\alpha_3 = 30(\mathrm{km/h})$.由本文提供的算法，可以求得合适的二自由度鲁棒控制器 $K_1(s)$ 和 K_2 的参数.下面图 1 和图 2 是在标称车速为 $V = 110(\mathrm{km/h})$，H_∞ 性能指标为 $\gamma = 0.007$，前轮角输入信号为 1° 时，采用不同控制器时的动态响应.由图 1 可以清楚地看到采用传统的零侧偏角控制器，在参数不确定性的作用下，质心处侧偏角 β 在 ±0.5° 附近波动，侧偏角的这种变动将会改变胎面的附着状况，从而引起侧向加速度的波动，减少侧向加速度，也即降低了汽车抗侧滑能力.比较图 1 和图 2 可以看出，采用鲁棒控制器比用零侧偏角控制器有较大的车体横摆角速度稳态增益，前者比后者增加 54%，从而提高了转向灵敏度，同时图 2 的动态响应符合美国试验安全车的操纵稳定性性能要求，即设计的二自由度鲁棒控制器比传统的零侧偏角控制器有更好的性能.

5　结束语(Conclusion)

本文采用鲁棒控制理论设计了汽车四轮转向控制器，从仿真结果可以看出，采用本文设计的二自由度鲁棒控制比用传统的零侧偏角控制器有更好的动态响应.由于汽车在行驶过程中，难以实时准确测量轮胎的侧偏刚度，只能使用在一定实验条件下测得轮胎数据，而且难以建立准确的汽车转向模型，这样根据传统方法设计的控制器就难以适应实际应用的需要；鲁棒控制器的优点就在于可用一个较简单的控制器就可以获得较好的控制效果；另外，可以综合各种性能指标，从而为研究汽车各个子系统的综合控制提供了可能.本文研究的是汽车的一个较简单工况，如何设计复杂工况下(如转向制动等)以及与

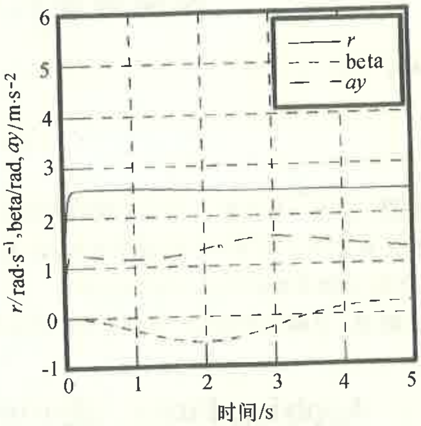

图 1　零侧偏角控制器
Fig. 1　Zero-side-slip controller

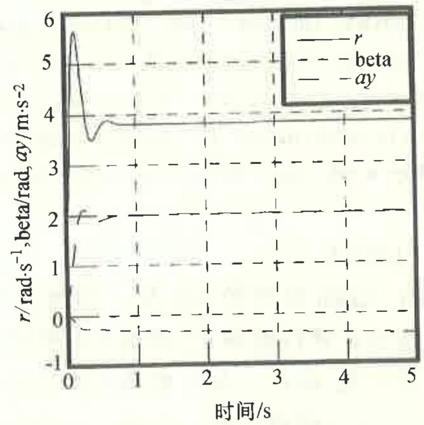

图 2　鲁棒控制器
Fig. 2　Robust controller

其他子系统(如 ABS、TRC、主动悬架等)的综合转向控制器还是一个值得继续研究的问题.

参考文献(References)

1　Ackermann J. Robust decoupling, ideal steering dynamics and yaw stabilization of 4WS cars. Automatica, 1994, 30(11): 1761 – 1768

2　Lin Y. Improving vehicle handling performance by a closed-loop 4WS driving controller. SAE 921604, 1992

3　Morari M and Zafriou E. Robust Process Control. Engle-wood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1989

4　Feron E, Apkarian P and Gahinet P. Analysis and synthesis of robust control systems via-parameter-dependent Lyapunov functions. IEEE Trans. Automat. Contr., 1996, 41(7): 1041 – 1046

本文作者简介

胡立生　1964 年生.浙江大学工业控制技术研究所博士.研究方向为：非线性不确定系统和非线性不确定采样系统的约束鲁棒控制，生产过程的动态优化，汽车的综合自动化.

孙优贤　见本刊 1999 年第 1 期第 112 页.

李幼德　1947 年生.吉林工业大学汽车工程学院汽车系教授、博士生导师.研究方向为汽车电子控制系统的研究与开发.