第 16 卷第 5 期
1999 年 10 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 16, No. 5
Oct., 1999

广义非线性系统解的一致最终有界性研究*

温香彩
(国家环境保护总局信息中心·北京,100029)

刘永清
(华南理工大学电子与信息学院·广州,510640)

摘要: 首先利用隐函数定理及常规的非线性系统解的存在唯一性定理,给出了广义非线性系统解的存在唯一性条件,然后利用标量和 Lyapunov 函数方法,从系统本身出发,研究了广义非线性系统解的一致最终有界性,给出了判定解一致最终有界的条件,此条件无需求解原方程,并以例子给出了说明.

关键词: 广义非线性系统; 一致最终有界; Lyapunov 函数

Study on Uniform Ultimate Boundedness of Solution for Singular Nonlinear Systems

Wen Xiangcai
(Center of Information, State Environment Protection Administration·Beijing, 100029, P. R. China)

Liu Yongqing
(College of Electronic & Information, South China University of Technology·Guangzhou, 510640, P. R. China)

Abstract: The conditions of existence and uniqueness of solution for singular nonlinear systems are given by employing implicit function theorem and the existent and unique theorem of solution for normal nonlinear system at first, and then, from the original form of system, the uniform ultimate boundedness of solution for singular nonlinear system is studied by using scalar Lyapunov function; the criteria, which needn't solve original system equation, of uniform ultimate boundedness of solution for singular nonlinear system is obtained. An illustrated example is given.

Key words: singular nonlinear system; uniform ultimate boundedness; Lyapunov function

1 引言(Introduction)

所谓广义非线性系统就是具有代数方程所限制的非线性系统. 这种系统很自然的出现在很多应用中,例如受限机器人[1],空间运载卫星重返大气层[2],飓风的预报[2],带有二极管的 RC 电路[3]等. 当伴随的代数方程组可由描述系统消去时,系统方程组就化为常规的微分方程. 不幸的是这种形式的方程组不易得到,有时甚至是不可能的. 因此对广义非线性系统进行研究时,不仅要考虑到动态特性而且还要考虑到由代数方程所确定的静态特性. 常规的处理微分系统的分析方法已不能被简单地应用于广义非线性系统,需建立或发展新的研究方法.

关于广义非线性系统的稳定性问题,已有一些结果[3,4]. 但对于有界性及周期解的存在性,研究结果甚少. 而在许多系统中,如非线性振动系统,人们感兴趣的不是系统的稳定性,而是系统的有界性或周期解的存在性. 对正常的非线性系统,Yoshizawa[5]、Lasalle 和 Lefchetz 等人[6]建立了动态系统解的有界性、最终有界性、无界性等理论. 本文利用隐函数定理及标量和 Lyapunov 函数方法首次研究了广义非线性系统的解的一致最终有界性问题.

2 系统的描述及预备知识(System description and preliminary)

考虑系统

$$\dot{x}_i = f_i(x_i, t) + g_i(x, y, t),\ i = 1,2,\cdots,N, \tag{1}$$

$$0 = H(x, y, t). \tag{2}$$

这里

$$x_i \in \mathbb{R}^{n_i},\ f_i : \mathbb{R}^{n_i} \times J \to \mathbb{R}^{n_i},$$

$$x^{\mathrm{T}} = (x_1^{\mathrm{T}}\ x_2^{\mathrm{T}} \cdots x_N^{\mathrm{T}}),\ x \in \mathbb{R}^n,$$

$$n = \sum_{i=1}^{N} n_i,\ t \in J = [0, \infty),$$

$$g_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times J \to \mathbb{R}^{n_i},\ y \in \mathbb{R}^m,$$

$$y^{\mathrm{T}} = (y_1^{\mathrm{T}}\ y_2^{\mathrm{T}} \cdots y_\lambda^{\mathrm{T}}),\ y_j \in \mathbb{R}^{m_j},$$

$$m = \sum_{j=1}^{\lambda} m_j,\ j = 1,2,\cdots,\lambda,$$

* 国家自然科学基金(69874010)和河南省自然科学基金(984050400)资助项目.
本文于 1996 年 5 月 15 日收到. 1998 年 10 月 21 日收到修改稿.

$$H: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times J \to \mathbb{R}^m,$$

令 $F^{\mathrm{T}}(x,t) = (f_1^{\mathrm{T}}(x_1,t) \cdots f_N^{\mathrm{T}}(x_N,t)),$

$$G^{\mathrm{T}}(x,y,t) = (g_1^{\mathrm{T}}(x,y,t) \cdots g_N^{\mathrm{T}}(x,y,t)),$$

则式(1)可表示为

$$\dot{x} = F(x,t) + G(x,y,t). \tag{3}$$

这里 $F: \mathbb{R}^n \times J \to \mathbb{R}^n$, $G: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times J \to \mathbb{R}^n$. 式(3)和式(2)称为式(1)和式(2)的复合形式,它可看成 N 个孤立子系统

$$\dot{x}_i = f_i(x_i,t),\ i = 1,2,\cdots,N \tag{4}$$

的一非线性时变关联,$G(x,y,t)$ 和 $H(x,y,t)$ 表示关联结构.

关于方程(1)和(2)的解 $z^{\mathrm{T}}(t,x_0,y_0,t_0) = (x(t,x_0,y_0,t_0)\ y(t,x_0,y_0,t_0))$ 有界、一致有界、一致最终有界的定义同常规的非线性系统解的相关定义一样,此处略.

定义 1 称函数 $V(t,x)$ 具有性质A,若存在一个非负的连续增函数 $a(r)$ 使得 $V(t,x) \leqslant a(\|x\|)$.

定义 2 称函数 $V(t,x)$ 具有性质B,若存在一个非负的连续增函数 $b(r)$ 使得 $V(t,x) \geqslant b(\|x\|)$,且 $\lim\limits_{r\to\infty} b(r) = \infty$.

定义 3 称函数 $V(t,x)$ 具有性质C,若存在一个非负的连续函数 $c(r)$ 使得 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(t,x) \leqslant -c(\|x\|)$.

引理 1[7] 对方程 $\dot{x} = X(x,t)$, $t \geqslant 0$,如果存在一个正的 Lyapunov 函数 $V(t,x)$,在乘积空间

$$\Delta^*: I(0 \leqslant t < \infty) \times E_{R_0}^*(\|x\| \geqslant R_0)$$

内定义,具有性质A,B和C,则方程的解是一致最终有界的.

3 主要结果(Main results)

在动态系统的分析中,一个基本的问题是解的初值问题.对广义非线性系统(2),(3),它的初值问题为一对函数 $(x(t),y(t)) = (x(t),h(x(t)))$ 在区间 I 上关于 t 连续,满足系统(2),(3),且满足初始条件 $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, x_0 任意, $y_0 \in \mathbb{R}^m$ 依赖于 x_0 使得 $H(x_0,y_0,0) = 0$.

定理 1 对系统(2),(3),如果函数 $H(x,y,t)$, $F(x,t) + G(x,y,t)$ 在某一区域 Γ 中有定义,且满足条件:

1) $H(x,y,t)$, $F(x,t) + G(x,y,t)$ 及其偏导数在 Γ 中连续;

2) $H(x,y,t)$ 关于 y 的雅可比行列式满秩,则对于区域 Γ 中的每一满足 $H(x_0,y_0,t_0) = 0$ 的点 (t_0,x_0,y_0) 存在方程组(2),(3)的定义在某一含 (t_0,x_0) 的域上的解 $(x(t),y(t))$.

证 由条件1)和2)及隐函数存在定理知,$0 = H(x,y,t)$ 有唯一解 $y = k(x,t)$, $y_0 = k(x_0,t_0)$. 把 $y = k(x,t)$ 代入式(3)得 $\dot{x} = F(x,t) + G(x,k(x,t),t)$. 此方程为一常微分方程,满足解的存在唯一性定理,故对任一 (t_0,x_0),存在唯一解 $x(t)$ 定义在某区间 I 上. 证毕.

下面研究广义非线性系统解的一致最终有界性.

定义 4 称子系统(4)具有性质D,若存在连续可微函数 $V_i: \mathbb{R}^{n_i} \times J \to \mathbb{R}$, $\Psi_{i1}, \Psi_{i2}, \Psi_{i3} \in K\mathbb{R}$ 及常数 $\sigma_i \in \mathbb{R}$ 使得对所有 $t \in J$ 和所有 $\|x_i\| \geqslant R_i$(这里 R_i 可以很大)均有

$$\Psi_{i1}(\|x_i\|) \leqslant V_i(x_i,t) \leqslant \Psi_{i2}(\|x_i\|),$$

$$\mathrm{D}V_i(x_i,t)\,|_{(4)} \leqslant \sigma_i \Psi_{i3}(\|x_i\|).$$

此外,$V_i(0,t) = 0$, $V_i(x_i,t)$ 及 $\mathrm{D}V_i(x_i,t)\,|_{(4)}$ 在 $B_i(R_i) \times J$ 上有界,这里 $B_i(R_i) = \{x_i : \|x_i\| < R_i\}$.

定理 2 对系统(2),(3)若满足条件:

i) 各孤立子系统(4)具有性质D;

ii) 系统(2)为自治方程,且 $H(x,y)$, $F(x,t) + G(x,y,t)$ 在整个 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times J$ 上有连续的一阶偏导数,且 $H(x,y)$ 关于 y 的雅可比行列式满秩;

iii) 给定条件 i) 中的 V_i 及 Ψ_{i3},存在常数 $a_{ij} \in \mathbb{R}$ 使得对所有 $t \in J$, $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $y_j \in \mathbb{R}^{m_j}$, $i = 1,2,\cdots,N$; $j = 1,2,\cdots,\lambda$ 均有

$$\nabla V_i(x_i,t)^{\mathrm{T}} g_i(x_1,\cdots,x_N,y_1,\cdots,y_\lambda,t) \leqslant \Psi_{i3}^{\frac{1}{2}}(\|x_i\|)\Big(\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\Psi_{j3}^{\frac{1}{2}}(\|x_j\|) + \sum_{j=1}^{\lambda} c_{ij}\Psi_{j4}(\|y_j\|)\Big),$$

且存在实常数 d_{jk} 使不等式 $\Psi_{j4}(\|y_j\|) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{N} d_{jk}\Psi_{k3}^{\frac{1}{2}}(\|x_k\|)$ 成立;

iv) 存在一 N 维向量 $\alpha^{\mathrm{T}} = (\alpha_1 \cdots \alpha_N)$, $\alpha_i > 0$, $i = 1,2,\cdots,N$,使得矩阵 $S = (S_{ij})$ 负定.这里

$$S_{ij} = \begin{cases} \alpha_i(\sigma_i + a_{ii} + \sum\limits_{k=1}^{\lambda} c_{ik}d_{ki}),\ i = j; \\ \dfrac{1}{2}[\alpha_i(a_{ij} + \sum\limits_{k=1}^{\lambda} c_{ik}d_{kj}) + \alpha_j(a_{ji} + \sum\limits_{k=1}^{\lambda} c_{jk}d_{ki})], \\ \qquad i \neq j. \end{cases}$$

则系统(2),(3)的解一致最终有界.

证　利用部分变元理论,首先证明系统(2),(3)的解的部分变量 x 一致最终有界.由条件 i) 中的函数 V_i 和条件 iv) 中的向量 α,选择 Lyapunov 函数为 $V(x,t)=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i V_i(x_i,t)$.显然 $V(x,t)$ 连续可微,且对所有 $t\in J$ 有 $V(0,t)=0$.因为对每个孤立子系统(4)均具有性质D,所以对所有 $t\in J$, $x\in\mathbb{R}^n-B_1(R_1)\times\cdots\times B_N(R_N)$, $V(x,t)$ 是正定递降和径向无界的.下证 $V(x,t)$ 对此域上所有 x,t,沿着(2),(3)的解关于 t 的导数负定.事实上

$$
\begin{aligned}
&DV(x,t)|_{(2),(3)}=\\
&\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\{DV_i(x_i,t)|_{(4)}+\nabla V_i(x_i,t)^{\mathrm T}g_i(x,y,t)\}\leqslant\\
&\sum_{j=1}^{N}\alpha_i\{\Psi_{i3}^{\frac12}(\|x_i\|)\sum_{j=1}^{N}a_{ij}\Psi_{j3}^{\frac12}(\|x_j\|)+\\
&\sigma_i\Psi_{i3}(\|x_i\|)+\Psi_{i3}^{\frac12}(\|x_i\|)\sum_{j=1}^{\lambda}c_{ij}\sum_{k=1}^{N}d_{jk}\Psi_{k3}^{\frac12}(\|x_k\|)\}\leqslant\\
&w^{\mathrm T}Rw=w^{\mathrm T}\frac{R+R^{\mathrm T}}{2}w=w^{\mathrm T}Sw.
\end{aligned}
$$

这里

$$w^{\mathrm T}=(\Psi_{13}^{\frac12}(\|x_1\|)\cdots\Psi_{N3}^{\frac12}(\|x_N\|)),$$

矩阵 $R=(r_{ij})$ 为

$$
r_{ij}=\begin{cases}\alpha_i(\sigma_i+a_{ii}+\sum_{k=1}^{\lambda}c_{ik}d_{ki}), & i=j,\\ \alpha_i(a_{ij}+\sum_{k=1}^{\lambda}c_{ik}d_{kj}), & i\neq j,\end{cases}
$$

注意到 S 负定,即知 $DV(x,t)|_{(2),(3)}$ 负定.为完成定理证明,还需考虑某些 x_i 满足 $\|x_i\|<R_i$ 的情况.先考虑情形1:当 $i=1,2,\cdots,r$ 时 $\|x_i\|\geqslant R_i$;而当 $i=r+1,r+2,\cdots,N$ 时 $\|x_i\|<R_i$.这时

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{r}\alpha_i\Psi_{i1}(\|x_i\|)+\sum_{i=r+1}^{N}\alpha_iV_i(x_i,t)\leqslant\\
&V(x,t)\leqslant\sum_{i=1}^{r}\alpha_i\Psi_{i2}(\|x_i\|)+\sum_{i=r+1}^{N}\alpha_iV_i(x_i,t).
\end{aligned}
$$

因为 V_i 在$\mathbb{R}^{n_i}\times J$上连续且在 $B_i(R_i)\times J$ 上有界, $i=1,2,\cdots,N$,故存在 $\varphi_1,\varphi_2\in K\mathbb{R}$ 使对所有满足情形1的 $x\in\mathbb{R}^n$ 均有 $\varphi_1(\|x\|)\leqslant V(x,t)\leqslant\varphi_2(\|x\|)$.沿着(2),(3)的解有

$$
\begin{aligned}
&DV(x,t)|_{(2),(3)}\leqslant\\
&\sum_{i=1}^{r}\alpha_i\sigma_i\Psi_{i3}(\|x_i\|)+\sum_{i=1}^{r}\alpha_i\Psi_{i3}^{\frac12}(\|x_i\|)\{\sum_{j=1}^{r}\alpha_{ij}\Psi_{j3}^{\frac12}(\|x_j\|)+\\
&\sum_{j=1}^{\lambda}c_{ij}\sum_{k=1}^{r}d_{jk}\Psi_{k3}^{\frac12}(\|x_k\|)\}+\sum_{i=r+1}^{N}\alpha_iDV_i(x_i,t)|_{(4)}+\sum_{i=1}^{r}\alpha_i\Psi_{i3}^{\frac12}(\|x_i\|)\{\sum_{j=r+1}^{N}a_{ij}\Psi_{j3}^{\frac12}(\|x_j\|)+\\
&\sum_{j=1}^{\lambda}c_{ij}\sum_{k=r+1}^{N}d_{jk}\Psi_{k3}^{\frac12}(\|x_k\|)\}+\sum_{i=r+1}^{N}\alpha_i\Psi_{i3}^{\frac12}(\|x_i\|)\times\{\sum_{j=1}^{r}\alpha_{ij}\Psi_{j3}^{\frac12}(\|x_j\|)+\\
&\sum_{j=1}^{\lambda}c_{ij}\sum_{k=1}^{r}d_{jk}\Psi_{j3}^{\frac12}(\|x_j\|)\}+\sum_{i=r+1}^{N}\alpha_i\Psi_{i3}^{\frac12}(\|x_i\|)\{\sum_{j=r+1}^{N}a_{ij}\Psi_{j3}^{\frac12}(\|x_j\|)+\sum_{j=1}^{\lambda}c_{ij}\sum_{k=r+1}^{N}d_{jk}\Psi_{k3}^{\frac12}(\|x_k\|)\}.
\end{aligned}
$$

对所有 $\|x_i\|<R_i$, $i=r+1,r+2,\cdots,N$ 存在常数 K_1,K_2,K_3 和 M_i,使得

$$
\begin{aligned}
&K_1\geqslant\sum_{j=r+1}^{N}|\alpha_{ij}|\Psi_{j3}^{\frac12}(\|x_j\|)+\\
&\qquad\sum_{j=1}^{\lambda}|c_{ij}|\sum_{k=r+1}^{N}d_{jk}\Psi_{k3}^{\frac12}(\|x_k\|),\\
&K_2\geqslant\sum_{i=r+1}^{N}\alpha_i\Psi_{i3}^{\frac12}(\|x_i\|),\\
&K_3\geqslant\sum_{i=r+1}^{N}\alpha_i\Psi_{i3}^{\frac12}(\|x_i\|)\{\sum_{j=r+1}^{N}\alpha_{ij}\Psi_{j3}^{\frac12}(\|x_j\|)+\\
&\qquad\sum_{j=1}^{\lambda}c_{ij}\sum_{k=r+1}^{N}d_{jk}\Psi_{k3}^{\frac12}(\|x_k\|)\},\\
&M_i\geqslant\|DV_i(x_i,t)|_{(4)}\|.
\end{aligned}
$$

故

$$
\begin{aligned}
&DV(x,t)|_{(2),(3)}\leqslant\\
&w^{\mathrm T}\tilde Sw+K_1\sum_{i=1}^{r}\alpha_i\Psi_{j3}^{\frac12}(\|x_j\|)+\\
&\sum_{i=r+1}^{N}\alpha_iM_i+K_3+K_2[\sum_{j=1}^{r}|\alpha_{ij}|\Psi_{j3}^{\frac12}(\|x_j\|)+\\
&\sum_{j=1}^{\lambda}c_{ij}\times\sum_{k=1}^{r}d_{jk}\Psi_{j3}^{\frac12}(\|x_j\|)].
\end{aligned}
$$

这里 $\tilde S=\frac12(\tilde R^{\mathrm T}+\tilde R)$, $\tilde R$ 为 R 的前 r 行 r 列主子矩阵.显然对 $i=1,2,\cdots,r$, $\|x_i\|$ 充分大, $DV(x,t)|_{(2),(3)}$ 的符号由 $w^{\mathrm T}(\tilde S)w$ 确定.由于 S 负定,故 $\tilde S$ 也为负定.由引理1知解的部分变量 x 一致最终有界.

上面假定了当 $i=1,2,\cdots,r$, $\|x_i\|\geqslant R_i$;当 $i=r+1,r+2,\cdots,N$, $\|x_i\|<R_i$.这些脚标的任意组合,证明类似.下面判定解的部分变量 y 一致最终

有界.因为 $H(x,y)=0$ 为自治方程,与 t 无关,故由条件ii)及隐函数存在定理,对每一 x,在 x 的邻域内存在唯一的 $y=k(x)$ 使 $H(x,k(x))=0$ 且 y 为 x 的连续函数.因为 x 一致最终有界,由解的延拓定理及有限覆盖定理知 y 一致最终有界. 证毕.

例 考察系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1=-x_1^3-1.5x_1|x_2|^3,\\ \dot{x}_2=-x_2^5+x_1^2x_2^2+x_2^2(q_{21}^*d_1(y_1)+q_{22}^*d_2(y_2)),\end{cases}\tag{5}$$

$$0=x_1-y_1e^{y_1^2},\ 0=x_1\sin x_2-y_2e^{y_1^2+y_2^2}.\tag{6}$$

其中 $d_1(y_1)=y_1^2, d_2(y_2)=\frac{1}{2}y_2|y_2|, x_1\in\mathbb{R}, x_2\in\mathbb{R}$.

系统(5),(6)可看成孤立子系统 $\dot{x}_1=-x_1^3,\dot{x}_2=-x_2^5$ 的非线性关联,关联结构为

$$g_1(x_1,x_2,y_1,y_2,t)=-1.5x_1|x_2|^3,$$

$$g_2(x_1,x_2,y_1,y_2,t)=x_1^2x_2^2+x_2^2(q_{21}^*d_1(y_1)+q_{22}^*d_2(y_2)).$$

选取 $V_1(x_1)=x_1^2, V_2(x_2)=x_2^2$,令

$$\Psi_{11}=\Psi_{12}=x_1^2,\ \Psi_{21}=\Psi_{22}=x_2^2,$$

$$\Psi_{13}=|x_1|^4,\ \Psi_{23}=|x_2|^6,$$

$$\Psi_{13}^{\frac{1}{2}}=|x_1|^2,\ \Psi_{23}^{\frac{1}{2}}=|x_2|^3,$$

$$\Psi_{14}=|y_1|^2,\ \Psi_{24}=|y_2|^2,$$

则有

$$\nabla V_1^{\mathrm{T}}g_1=-3x_1^2|x_2|^3=-3\Psi_{13}^{\frac{1}{2}}\Psi_{23}^{\frac{1}{2}},$$

$$\nabla V_2^{\mathrm{T}}g_2\leqslant 2\Psi_{13}^{\frac{1}{2}}\Psi_{23}^{\frac{1}{2}}+2|q_{21}^*|\Psi_{13}^{\frac{1}{2}}\Psi_{14}+\Psi_{23}^{\frac{1}{2}}|q_{22}^*|\Psi_{24}.$$

由式(6)及隐函数定理知,对每一 (x_1,x_2),存在唯一的 $y_1=k_1(x_1,x_2), y_2=k_2(x_1,x_2)$,使式(6)成立,且有估计式

$$|y_1|\leqslant|x_1|,\ |y_2|\leqslant|x_1|.$$

故

$$\Psi_{14}=|y_1|^2\leqslant|x_1|^2=\Psi_{13}^{\frac{1}{2}},$$

$$\Psi_{24}=|y_2|^2\leqslant|x_1|^2=\Psi_{13}^{\frac{1}{2}}.$$

从而有

$$\nabla V_2^{\mathrm{T}}g_2\leqslant\Psi_{13}^{\frac{1}{2}}(2)\Psi_{23}^{\frac{1}{2}}+\Psi_{23}^{\frac{1}{2}}|2q_{21}^*|\Psi_{13}^{\frac{1}{2}}+\Psi_{23}^{\frac{1}{2}}|q_{22}^*|\Psi_{13}^{\frac{1}{2}}.$$

取 $d^{\mathrm{T}}=(1\quad 1)$,则定理2中的矩阵 S 为

$$S=\begin{bmatrix}-2 & \frac{-1+2|q_{21}^*|+|q_{22}^*|}{2}\\ \frac{-1+2|q_{21}^*|+|q_{22}^*|}{2} & -2\end{bmatrix},$$

当 $(-1+2|q_{21}^*|+|q_{22}^*|)^2<16$ 时,S 负定,故当参数 q_{21}^*,q_{22}^* 满足 $2|q_{21}^*|+|q_{22}^*|<5$ 时,系统(5),(6)的解一致最终有界.

4 结束语(Conclusion)

本文首次利用Lyapunov函数方法研究了广义非线性系统的解的一致最终有界性.首先利用隐函数定理及常规的非线性系统解的存在唯一性定理,给出了广义非线性系统解的存在唯一性条件;然后从系统本身出发,无需求解原系统,利用标量和Lyapunov函数,给出了判定广义非线性系统解的一致最终有界性条件,并以例子给出了说明.从本文的讨论和结果看,广义非线性系统可看成低阶简单孤立子系统的相互非线性关联.本文的研究方法可用来研究广义非线性系统的其它性质,如控制设计问题.

参考文献(References)

1 McClamroch N H, Wang D. Feedback stabilization and tracking of constrained robot. IEEE Trans. Automat. Contr., 1988, 33(5): 419 - 426

2 刘永清,温香彩.广义系统的变结构控制.广州:华南理工大学出版社,1997

3 Bajic V B, Milic M M. Extended stability of motion of semistate systems. Int. J. Control, 1987, 46(6): 2183 - 2197

4 Wu Hansheng, Mizukami K. Lyapunov stability theory and robust control of uncertain descriptor systems. Int. Systems Science, 1995, 26(10): 1981 - 1991

5 Yoshizawa T. Stability theory by Lyapunov's second method. Mathematics Society, Tokyo, Japan, 1966

6 Lasalle J P, Lefschetz S. Stability by Lyapunov's direct method with applications. New York: Academic Press, 1961

7 秦元勋,王慕秋,王联.运动稳定性理论与应用.北京:科学出版社,1981

本文作者简介

温香彩 见本刊1999年第1期第90页.

刘永清 见本刊1999年第1期第122页.