最大不确定性参数系统的鲁棒镇定控制
——一种二次规划的方法

刘　翔　孙优贤　王文海
(浙江大学工业控制技术研究所, 浙江大学工业控制技术国家重点实验室·杭州, 310027)

摘要: 基于一个稳定性的充分条件, 给出了一种针对线性离散参数不确定系统的镇定方法. 由二次规划得到的最优控制器能够镇定具有最大的不确定参数向量无穷范数的系统. 仿真验证了本文的结论.

关键词: 鲁棒性; 最优控制; 二次规划

Stabilizing Control of Robustness for Systems with Maximum Uncertain Parameters
——A Quadratic Programming Approach

Liu Xiang,　Sun Youxian　and　Wang Wenhai
(Institute of Industrial Process Control, National Key Laboratory of Industrial Control Technology, Zhejiang University · Hangzhou, 310027, P. R. China)

Abstract: In this note, based on a sufficient condition for stabilization, a new way to stabilize linear discrete-time systems with uncertain parameters is developed. By quadratic programming, the optimal controller of fixed order we have got can stabilize the system with maximum infinite norm of the uncertain system parameter vector. The conclusion is confirmed by simulation.

Key words: robustness; optimal control; quadratic programming

1　引言(Introduction)

工业过程控制中, 由于现场干扰信号以及对象的时变性的影响, 也由于受到建模算法精度的限制, 系统模型参数常具有一定的不确定性. 因此, 研究在保证控制系统具有良好的动、静态性能的条件下, 适用于模型参数不确定性尽可能大的鲁棒镇定控制算法是一个有意义的课题. 文献[1]中采用线性规划的方法, 针对一个精确模型给出了在控制器阶次固定的条件下, 获得最优超调的控制器算法; 文献[2]也利用线性规划的方法, 给出了一种满足 SISO 连续系统渐近稳定必要条件的控制器设计方法.

本文运用二次规划的方法和离散控制系统渐近稳定的一个充分条件, 尝试了 SISO 线性离散系统在固定控制器阶次限制下, 参数不确定向量 $\|\phi\|_\infty$ 最大时的鲁棒镇定控制器设计问题.

2　问题描述及基本引理(Problem description and basic lemma)

系统模型

$$G(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_n z^{-n} + b_{n-1} z^{-n+1} + \cdots + b_0}{a_n z^{-n} + a_{n-1} z^{-n+1} + \cdots + a_0}. \tag{1}$$

参考输入信号

$$R(z) = \frac{Q(z)}{S(z)} = \frac{q_l z^{-l} + q_{l-1} z^{-l+1} + \cdots + q_0}{s_l z^{-l} + s_{l-1} z^{-l+1} + \cdots + s_0}. \tag{2}$$

控制器

$$C(z) = \frac{C_p(z)}{D_p(z)} = \frac{c_p z^{-p} + c_{p-1} z^{-p+1} + \cdots + c_0}{d_p z^{-p} + d_{p-1} z^{-p+1} + \cdots + d_0}. \tag{3}$$

为了确保任意配置闭环极点, 要求 $p \geqslant n + l - 1$, 当 $p > n + l - 1$ 时, 就具备了满足系统其它性能的设计条件[1], 本文讨论的问题是: 在固定控制器阶次 p 并满足引理的稳定性要求下, 对象 $G(z)$ 的参数向量

$$g = [a_n\, a_{n-1} \cdots a_0\, b_n\, b_{n-1} \cdots b_0]^{\mathrm{T}}.$$

摄动为

$$g_\varepsilon = [a_n + \zeta_n \cdots a_0 + \zeta_0 \quad b_n + \varepsilon_n \cdots b_0 + \varepsilon_0]^{\mathrm{T}}.$$

参数误差向量

$$\phi \in l_\infty,$$

$$\phi = [\zeta_n, \zeta_{n-1}, \cdots, \zeta_0, \varepsilon_n, \varepsilon_{n-1}, \cdots, \varepsilon_0]^{\mathrm{T}}, \tag{4}$$

保证系统渐近稳定时所允许的 max $\|\phi\|_\infty$.

本文于 1997 年 12 月 17 日收到. 1998 年 5 月 29 日收到修改稿.

引理 实系数多项式 $f(z)=a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0$,若满足 $a_n>a_{n-1}>\cdots>a_0>0$,则 $f(z)$ 的全部根在单位圆内.

这个引理是Jury判据的一个直接推论,具体证明从略.

3 主要结果(Main results)

由于闭环系统特征多项式

$$F(z)=A(z)D_p(z)+B(z)C_p(z), \tag{5}$$

$F(z)$ 是 $n+p$ 阶实系数多项式,当 $p\geqslant n+l-1$ 时,可以任意选择所有极点位置.为满足引理要求,令

$$E=\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -1 & \ddots & & 0 & \\ & \ddots & \ddots & & \\ 0 & & -1 & 1 & \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$M=\begin{bmatrix} a_n & & & b_n & & \\ a_{n-1} & \ddots & 0 & b_{n-1} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots \\ a_0 & \cdots & a_{n-1}\ \ a_n & b_0 & \cdots & b_{n-1}\ \ b_n \\ & \ddots & a_{n-1} & & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & \ddots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ & & a_0 & & & b_0 \end{bmatrix},$$

$$x=[d_p\ d_{p-1}\cdots d_0\ c_p\ c_{p-1}\cdots c_0]^{\mathrm T},$$

$$M_1=EM, \tag{6}$$

构成向量不等式:

$$M_1x>0. \tag{7}$$

M_1 是 $(p+n+1)\times 2(p+1)$ 阶系数矩阵,由于 $p>n+l-1$,向量不等式(7)中变量数大于方程数,所以,除可设计控制器满足闭环极点位置外,还可使闭环系统满足其它性能指标.本文讨论最大参数不确定鲁棒镇定问题,为此,组成如下二次规划问题:

$$\begin{aligned} f(x)&=\min x^{\mathrm T}Hx+c^{\mathrm T}x,\\ \text{s.t. }&M_1x>0. \end{aligned} \tag{8}$$

其中

$$H=D^{\mathrm T}D,$$

$$D=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & & & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots & & 0 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & & & & \\ 0 & 0 & -1 & 1 & & & & \\ & & & & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & & & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}_{2(p+1)\times 2(p+1)},$$

$$c^{\mathrm T}=[0\cdots -a_0\quad 0\cdots -b_0].$$

定理 由二次规划问题(8)的最优解 x^* 组成的最优 p 阶控制器 $C^*(z)$,使闭环系统渐近稳定所允许的模型参数误差向量的 $\|\phi\|_\infty$ 达到最大.

证 由于 $M_1x>0$,根据引理,闭环系统渐近稳定.在参数有误差情形下,

$$M_\varepsilon=\begin{bmatrix} a_n+\zeta_n & 0 & b_n+\varepsilon_n & 0 \\ a_{n-1}+\zeta_{n-1} & \ddots & b_{n-1}+\varepsilon_{n-1} & \ddots \\ \vdots & \cdots\ a_n+\zeta_n & \vdots & \ddots\ b_n+\varepsilon_n \\ a_0+\zeta_0 & & b_0+\varepsilon_0 & b_{n-1}+\varepsilon_{n-1} \\ 0 & \ddots & 0 & \ddots\ \vdots \\ & a_0+\zeta_0 & & b_0+\varepsilon_0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

x 是控制器参数向量,

$$M_\varepsilon x=Mx+\Delta Mx,$$

而

$$\Delta Mx=X\phi, \tag{10}$$

其中

$$X=\begin{bmatrix} d_p & 0 & c_p & 0 \\ d_{p-1} & \ddots & c_{p-1} & \ddots \\ \vdots & \ddots\ d_p & \vdots & \ddots\ c_p \\ d_0 & \cdots\ d_{p-1} & c_0 & \cdots\ c_{p-1} \\ 0 & \ddots\ \vdots & 0 & \ddots\ \vdots \\ & d_0 & & c_0 \end{bmatrix},\ \phi=\begin{bmatrix}\zeta_n\\ \vdots\\ \zeta_0\\ \varepsilon_n\\ \vdots\\ \varepsilon_0\end{bmatrix},$$

即有

$$M_\varepsilon x=Mx+X\phi \tag{11}$$

取矩阵

$$E=\begin{bmatrix} 1 & & \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots \\ & -1 & 1 \end{bmatrix}_{(n+p+1)\times(n+p+1)}, \tag{12}$$

得到

$$EM_\varepsilon x=M_1x+EX\phi. \tag{13}$$

因为 $M_1x>0$,所以为了保证在尽可能大的 $\|\phi\|_\infty$ 下,使 $EM_\varepsilon x>0$,需 $\|EX\phi\|_\infty\to\min$.

又 $\phi\in l_\infty$,由 l_1-优化理论[4]知,上式等价为

$$\|EX\|_1\to\min\ (\|EX\phi\|_\infty\leqslant\|EX\|_1\|\phi\|_\infty). \tag{14}$$

因为

$$EX = \begin{bmatrix} d_p & & & & c_p & & & \\ d_{p-1}-d_p & \ddots & & & c_{p-1}-c_p & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & d_p & \vdots & & \ddots & c_p \\ d_0-d_1 & \cdots & \cdots & d_{p-1}-d_p & c_0-c_1 & \cdots & \cdots & c_{p-1}-c_p \\ -d_0 & \ddots & & \vdots & -c_0 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & -d_0 & d_0-d_1 & & & -c_0 & c_0-c_1 \end{bmatrix}_{(n+p+1)\times 2(p+1)}, \tag{15}$$

且 $\|EX\|_1 = \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{2(p+1)} |(EX)_{ij}|$，$(EX)_{ij}$ 是矩阵 EX 的元素（$1 \leqslant i \leqslant n+p+1, 1 \leqslant j \leqslant 2(p+1)$）. 所以，若 EX 中每一元素的绝对值均取最小值，则 $\|EX\|_1$ 也取最小值；为使最小值向量 x^* 的所有元素不全为零，需等价地选取 EX 中所有相互独立的变量：$d_p, (d_{p-1}-d_p), \cdots, (d_0-d_1), c_p, (c_{p-1}-c_p), \cdots, (c_0-c_1)$，因此，考虑到优化变量之间的相互独立性，取性能指标：

$$\min\{|c_p|+|d_p|+\sum_{i=1}^{p}(|c_{i-1}-c_i|+|d_{i-1}-d_i|)\}. \tag{16}$$

又因为

$$\min\{c_p^2 + d_p^2 + \sum_{i=1}^{p}[(c_{i-1}-c_i)^2 + (d_{i-1}-d_i)^2]\} = \min x^{\mathrm{T}}Hx, \tag{17}$$

注意到(16)式的右边等价于(17)式的左边，从而得到

$$\min\|EX\|_1 \Longleftrightarrow \min x^{\mathrm{T}}Hx. \tag{18}$$

另一方面，在保证约束 $M_1x > 0$ 不变的条件下，向量 M_1x 的每个元的最大值等价为：

$$\max\|M_1x\|_1 = \max[0,\cdots,a_0,0,\cdots,b_0]x. \tag{19}$$

而

$$\max[0,\cdots,a_0,0,\cdots,b_0]x = \min c^{\mathrm{T}}x. \tag{20}$$

综合以上，定理得证.

应该说明，由定理证明中的(13)，(14)式可以确定，根据最优值 x^*

$$\max\|\phi\|_\infty = \frac{\min\limits_i (M_1x^*)_i - \varepsilon}{\|EX^*\|_1}, \ \varepsilon > 0, \varepsilon \to 0, \tag{21}$$

$(M_1x^*)_i$ 是向量 M_1x^* 的第 i 个元素，$1 \leqslant i \leqslant n + p + 1$.

无静差控制器的实现：

为确保系统的无静差，要求 $D_p(z)$ 中包含 $S(z)$，即

$$D_p(z) = S(z)x'(z), \tag{22}$$

$$x'(z) = x'_{p-1}z^{-(p-1)} + x'_{p-l-1}z^{-(p-l-1)} + \cdots + x'_0. \tag{23}$$

将(22)式嵌入(7)式得到：

$$\begin{cases} \bar{M}_1\bar{x} > 0, \\ \bar{M}_2\bar{x} = 0, \end{cases} \tag{24}$$

$$\bar{M}_1 = [M_1 \quad 0]_{(p+n+1)\times(3p-l+3)},$$

$$\bar{M}_2 = [I_{p+1} \quad 0 \quad -S]_{(p+1)\times(3p-l+3)},$$

$$S = \begin{bmatrix} s_l & & & \\ s_{l-1} & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ s_0 & \cdots & s_{l-1} & s_l \\ & \ddots & & s_{l-1} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & s_0 \end{bmatrix}_{(p+1)\times(p-l+1)}. \tag{25}$$

由于 $p \geqslant n + l - 1$，用(24)式替代(8)式中的约束方程得到无静差条件下获得最大不确定参数的最优二次规划.

4　仿真分析(Simulation analysis)

系统模型：$G(z) = \dfrac{1-2z^{-1}}{1-5z^{-1}}$，输入信号 $r(z) = \dfrac{1}{1-z^{-1}}$，取控制器阶次 $p = 2 > n + l - 1 = 1$，按(8)式构成二次优化问题，并用 Matlab 软件包中 QP 优化工具库求得

$$c(z) = -\frac{2.42z^{-2} + 4.81z^{-1} + 6.76}{1.17z^{-2} + 2.07z^{-1} + 2.76},$$

$$\max\|\phi\|_\infty < 0.082.$$

图 1，图 2 分别是原模型和摄动模型 $G_\varepsilon(z) = \dfrac{1-1.92z^{-1}}{0.95-5.05z^{-1}}$ 的单位阶跃响应.

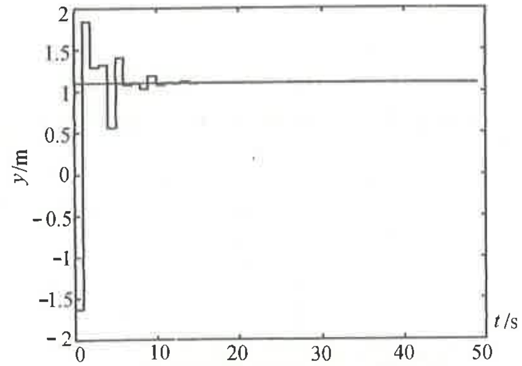

图 1 原模型阶跃响应曲线

Fig. 1 Step response curve for original model

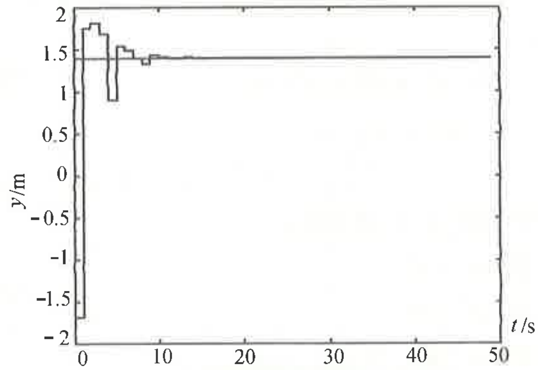

图 2 摄动模型阶跃响应曲线

Fig. 2 Step response curve for perturbed model

当控制器阶次增大时，max $\|\phi\|_\infty$ 的范围变化列表如下：

表 1 鲁棒控制器阶次与鲁棒稳定域的关系

Table 1 The relationship between the order of robust controller and the region of the robust stability

控制器阶次	max $\|\phi\|_\infty$
$n=2$	0.082
$n=3$	0.071
$n=4$	0.061
$n=5$	0.055
$n=6$	0.048
$n=7$	0.043

表 1 说明：随控制器阶次增大，max $\|\phi\|_\infty$ 的范围减小，因此，在求解二次规划问题时，应在保证有解的前提下，尽量降低控制器的阶次．

5 结语(Conclusion)

本文尝试用数学规划的方法设计线性离散鲁棒镇定控制器．在一个渐近稳定的充分条件下，利用优化性能指标函数，可以获取各种性能最优控制器．如何扩大稳定域，又使约束条件满足优化约束规范是需进一步研究的问题．

参考文献(References)

1 Moore K L, et al. A technique for choosing zero location for minimal overshoot. IEEE Trans. Automat. Contr., 1990, 35(5): 577 – 580

2 Bhattacharyya S, et al. Stabilizability conditions using linear programming. IEEE Trans. Automat. Contr., 1988, 33(5): 460 – 463

3 Halpern M E, et al. Optimal pole placement design for SISO discrete-time systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1996, 41(9): 1322 – 1326

4 Dahleh M A and Diaz-Bobillo I J. Control of Uncertain Systems: A Linear Programming Approach. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1995

5 薛定宇．控制系统计算机辅助设计——MATLAB语言及应用．北京：清华大学出版社，1996

本文作者简介

刘　翔　1964年生．1999年9月在浙江大学获工学博士学位．现在浙江大学工业控制技术研究所从事博士后研究工作．研究领域为鲁棒计算机控制，多模型鲁棒控制等．

孙优贤　见本刊1999年第1期第112页．

王文海　1967年生．浙江大学工业控制技术研究所副研究员．研究领域为集散控制系统及应用等．