时变迭合 AR 模型的参数估计*

易东云　王正明
(国防科技大学系统工程与数学系·长沙, 410073)

摘要: 首次提出了时变迭合 AR 模型,该模型在实际应用中具有广泛的应用价值.应用两步最小二乘法和限定记忆递推最小二乘法,给出了模型中时变参数的递推估计算法,该算法仅依靠量测数据即能自适应进行.仿真计算及应用结果表明:算法能够自适应地跟踪量测数据模型参数的变化,效果是令人满意的.

关键词: 系统辨识; 时变迭合 AR 模型; 自适应算法

Parameter Estimation of Time Varying Mixed AR Model

Yi Dongyun　and　Wang Zhengming
(Departmet of System Engineering and Mathematics, National University
of Defense Technology·Changsha, 410073, P. R. China)

Abstract: In systematic identification, the measure noise can be assumed as AR model in general. As the measure noise in measured data can't be observed, the parameter estimation in AR model is difficult. Especially, the parameters in AR model are dynamical with time in actual. In this paper, the time varying mixed AR model is first presented and is used to solve the above problem. Applying two-step LS method and restricted remember LS method, an adaptive algorithm is proposed to estimate the time varying parameters only depending on measured data. Simulation and actual results show that the algorithm can automatically track the time varying characteristics of data. Applying this algorithm, we can also provide the statistical property needed by Kalman filtering in time.

Key words: parameter estimation; time varying mixed AR model; adaptive algorithm

1 模型(Model)

大多数系统辨识问题中,量测噪声一般均可假设满足 AR 模型.但量测数据中量测噪声的不可观测性,使模型中参数估计问题变得复杂和困难,特别地,在实际中模型参数往往具有时变特征.设有雷达跟踪系统对某一目标进行跟踪测量,设 Y_k 为 t_k 时刻的测量数据,则有如下量测方程

$$Y_{k-N+j} = S(t_{k-N+j}) + e_{k-N+j}, \tag{1}$$

$$S(t_{k-N+j}) = \sum_{i=1}^{4} a_i(k)\, t_{k-N+j}^{i-1}, \tag{2}$$

$$k \geqslant N, j = 1,2,\cdots,N.$$

其中 N 是模型(1)所处理数据点的个数,确定的原则以三阶多项式逼近测量数据中真实信号的截断误差忽略不计为准,测量数据中的测量噪声的时序相关性一般可用低阶 AR 模型描述[1].为使多项式保持对真实信号的逼近精度,采用长度为 N 的限定记忆法.取 $t_{k-N+j} = t_j = j\Delta t, j = 1,2,\cdots,N$,其中 Δt 为采样间隔,此时模型(1),(2)写为

$$Y_{k-N+j} = \sum_{i=1}^{4} a_i(k)\, t_j^{i-1} + e_{k-N+j}, j = 1,2,\cdots,N. \tag{3}$$

其中,量测噪声 e_{k-N+j} 为零均值 AR(p) 序列,即

$$e_{k-N+j} = \varphi_1(k) e_{k-N+j-1} + \cdots + \varphi_p(k) e_{k-N+j-p} + \varepsilon_{k-N+j}. \tag{4}$$

其中,ε_{k-N+j} 为零均值白噪声列,$\mathrm{var}(\varepsilon_{k-N+j}) = \sigma_\varepsilon^2(k)$.模型(3),(4)虽然形式上是文[2]讨论的迭合 AR 模型,但不同的是这里所讨论的多项式参数 $\{a_i(k), i = 1,2,3,4\}$ 及自回归参数 $\{\varphi_1(k),\cdots,\varphi_p(k),\sigma_\varepsilon^2(k)\}$ 都是时变的,这种模型本文称之为时变迭合 AR 模型.

2 算法(Algorithm)

设 B 为一步后移算子,$\phi_k(B) = 1 - \varphi_1(k)B - \cdots - \varphi_p(k)B^p$,则(4)式可表示为 $\phi_k(B) e_{k-N+j} = \varepsilon_{k-N+j}$,

* 国家 863-306-ZD-03-3 项目和国家自然科学基金(No.69872039)资助项目.
本文于 1997 年 12 月 2 日收到. 1998 年 7 月 2 日收到修改稿.

对固定点列 $t_j, j = 1,2,\cdots,N$,模型(3),(4)可作类似与文[2]中的推导.在(3)式两边同时作用 $\phi_k(\mathrm{B})$,得:

$$\phi_k(\mathrm{B})Y_{k-N+j} = \sum_{i=1}^{4} a_i(k)(\Delta t)^{i-1}\phi_k(\mathrm{B})j^{i-1} + \varepsilon_{k-N+j} = \sum_{i=1}^{4}\alpha_i(k)j^{i-1} + \varepsilon_{k-N+j}. \tag{5}$$

令 $\varphi(k) = (\varphi_1(k),\varphi_2(k),\cdots,\varphi_p(k))^{\mathrm{T}}$,则 $\alpha(k) = (\alpha_1(k),\alpha_2(k),\alpha_3(k),\alpha_4(k))^{\mathrm{T}}$ 满足

$$\alpha(k) = A(\varphi(k))a^*(k), \tag{6}$$

$a^*(k)=(a_1(k),\ a_2(k)\Delta(t),\ a_3(k)(\Delta t)^2, a_4(k)(\Delta t)^3)^{\mathrm{T}}$, $A(\varphi(k))$ 类似于文[2]中的(5)式,即有

$$A(\varphi(k)) = \begin{bmatrix} b_0(k) & b_1(k) & b_2(k) & b_3(k) \\ & b_0(k) & 2b_1(k) & 3b_2(k) \\ & & b_0(k) & 3b_1(k) \\ & & & b_0(k) \end{bmatrix}.$$

这里

$$b_0 = 1 + \sum_{j=1}^{p}(1 - \varphi_j(k)),$$

$$b_l = \sum_{j=1}^{p}(-\varphi_j(k))(-j)^l,\ 1 \leqslant l \leqslant 3.$$

下面首先讨论 $\varphi(k)$ 的估计,记:

$$Y_N(k) = \begin{bmatrix} Y_{k-N+1} \\ \vdots \\ Y_k \end{bmatrix},$$

$$M(k-N,k-p) = \begin{bmatrix} Y_{k-N} & \cdots & Y_{k-N+1-p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ Y_{k-1} & \cdots & Y_{k-p} \end{bmatrix},$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & 2^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & N & N^2 & N^3 \end{bmatrix},\ \hat{\varphi}(k) = \begin{bmatrix} \hat{\varphi}_1(k) \\ \vdots \\ \hat{\varphi}_p(k) \end{bmatrix},$$

$$H = U(U^{\mathrm{T}}U)^{-1}U^{\mathrm{T}},$$

可得两步最小二乘估计的正规方程[1]

$$M(k-N,k-p)^{\mathrm{T}}(I-H)M(k-N,k-p)\hat{\varphi}(k) = M(k-N,k-p)^{\mathrm{T}}(I-H)Y_N(k). \tag{7}$$

当获得第 $k+1$ 个数据 Y_{k+1} 时,有量测方程

$$Y_{k+1-N+j} = \sum_{i=1}^{4} a_i(k+1)t_j^{i-1} + e_{k+1-N+j},\quad j = 1,2,\cdots,N, \tag{8}$$

$$e_{k+1-N+j} = \varphi_1(k+1)e_{k+1-N+j} + \cdots + \varphi_p(k+1)e_{k+1-N+j-p} + e_{k+1-N+j}. \tag{9}$$

记

$$Y_N(k+1) = \begin{bmatrix} Y_{k+1-N+1} \\ \vdots \\ Y_{k+1} \end{bmatrix},\ \hat{\varphi}(k+1) = \begin{bmatrix} \hat{\varphi}_1(k+1) \\ \vdots \\ \hat{\varphi}_p(k+1) \end{bmatrix},$$

$$M(k+1-N,k+1-p) = \begin{bmatrix} Y_{k+1-N} & \cdots & Y_{k+1-N+1-p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ Y_k & \cdots & Y_{k+1-p} \end{bmatrix}.$$

同理可推得模型(8),(9)式的两步最小二乘估计的正规方程

$$M(k+1-N,k+1-p)^{\mathrm{T}}(I-H)\cdot M(k+1-N,k+1-p)\hat{\varphi}(k+1) = M(k+1-N,k+1-p)^{\mathrm{T}}(I-H)Y_N(k+1). \tag{10}$$

为了获得 AR(p) 参数的自适应估计,需要从(7),(10)两式导出 $\varphi(k+1)$ 与 $\varphi(k)$ 之间的递推关系式.记

$$Y_N(k+1-j) = \begin{bmatrix} Y_{k+1-j-N+1} \\ \vdots \\ Y_{k+1-j} \end{bmatrix}, j=0,1,\cdots,N,$$

$$Z_N(k+1-j) = \begin{bmatrix} Z_{k+1-j-N+1} \\ \vdots \\ Z_{k+1-j} \end{bmatrix} = (I-H)Y_N(k+1-j),$$

$$A_N(k+1) = (Z_N(k),Z_N(k-1),\cdots,Z_N(k-p)) = (I-H)M(k+1-N,k+1-p).$$

由以上记号,(10)式可改写为

$$A_N^{\mathrm{T}}(k+1)A_N(k+1)\hat{\varphi}(k+1) = A_N^{\mathrm{T}}(k+1)Z_N(k+1). \tag{11}$$

为了能从(11)式中导出递推式子,需要利用递推求解 AR(p) 参数的方法.考虑下面三个正规方程的解的关系:

$$A_N^{\mathrm{T}}(k)A_N(k)\hat{\varphi}(k) = A_N^{\mathrm{T}}(k)Z_N(k), \tag{12}$$

$$A_N^{\mathrm{T}}(k+1)A_N(k+1)\hat{\varphi}(k+1) = A_N^{\mathrm{T}}(k+1)Z_N(k+1), \tag{13}$$

$$A_{N+1}^{\mathrm{T}}(k+1)A_{N+1}(k+1)\hat{\varphi}_{N+1}(k+1) = A_{N+1}^{\mathrm{T}}(k+1)Z_{N+1}(k). \tag{14}$$

容易推知[3],(12),(14)两式的参数有如下递推关系:

$$\begin{cases} \hat{\varphi}_{N+1}(k+1) = \hat{\varphi}(k) + K_{k+1}[Z_{k+1} - b^{\mathrm{T}}(k+1)\hat{\varphi}(k)], \\ K_{k+1} = P_k b(k+1)[1+b^{\mathrm{T}}(k+1)P_k b(k+1)]^{-1}, \\ P_{k+1} = [I - K_{k+1}b^{\mathrm{T}}(k+1)]P_k. \end{cases} \tag{15}$$

其中 $P_k=[A_N^{\mathrm{T}}(k)A_N(k)]^{-1}$.我们的思路是通过寻找(13),(14)的 $\hat{\varphi}(k+1)$ 与 $\hat{\varphi}_{N+1}(k+1)$ 之间的递推关系,再利用(15)式中 $\hat{\varphi}_{N+1}(k+1)$ 与 $\hat{\varphi}(k)$ 的递推关系导出 $\hat{\varphi}(k+1)$ 与 $\hat{\varphi}(k)$ 的递推关系.由(13)式知

$$\hat{\varphi}(k+1)=P_N(k+1)A_N^{\mathrm{T}}(k+1)Z_N(k+1), \tag{16}$$

其中 $P_N(k+1)=[A_N^{\mathrm{T}}(k+1)A_N(k+1)]^{-1}$.推导计算 $P_N(k+1)$ 可得:

$$P_N(k+1)=[I+K_{k+1}^*(N+1)b^{\mathrm{T}}(k-N+1)]P_{k+1},$$

其中

$$K_{k+1}^*=P_{k+1}b(k-N+1)[I-b^{\mathrm{T}}(k-N+1)P_{k+1}b(k-N+1)]^{-1}. \tag{17}$$

计算可得:

$$A_N^{\mathrm{T}}(k+1)Z_N(k+1)=A_{N+1}^{\mathrm{T}}(k+1)Z_{N+1}(k+1)-b(k-N+1)Z_{k-N+1}.$$

由此

$$\hat{\varphi}(k+1)=\hat{\varphi}_{N+1}(k+1)-K_{k+1}^*[Z_{k-N+1}-b^{\mathrm{T}}(k-N+1)\hat{\varphi}_{N+1}(k+1)]. \tag{18}$$

综合(15),(17),(18)三式得如下递推公式:

1) $K_{k+1}=P_kb(k+1)[1+b^{\mathrm{T}}(k+1)P_kb(k+1)]^{-1}$;

2) $\hat{\varphi}_{N+1}(k+1)=\hat{\varphi}(k)+K_{k+1}[Z_{k+1}-b^{\mathrm{T}}(k+1)\hat{\varphi}(k)]$;

3) $P_{k+1}=[I-K_{k+1}b^{\mathrm{T}}(k+1)]P_k$;

4) $K_{k+1}^*=P_{k+1}b(k-N+1)[I-b^{\mathrm{T}}(k-N+1)P_{k+1}b(k-N+1)]^{-1}$;

5) $\hat{\varphi}(k+1)=\hat{\varphi}_{N+1}(k+1)-K_{k+1}^*[Z_{k-N+1}-b^{\mathrm{T}}(k-N+1)\hat{\varphi}_{N+1}(k+1)]$.

由以上递推公式知,只需给定初始估计 $\hat{\varphi}(k_0)$,P_{k_0},$k_0\geqslant N$,即可按上述公式递推求解自回归参数的估计.一般地,可取 $\hat{\varphi}(k_0)=0$,$P_{k_0}=\mu I$,μ 为一大的正整数.

以上获得了时变自回归参数 $\varphi(k)$ 的估计 $\hat{\varphi}(k)$.下面讨论时变多项式参数 $a(k)$ 的估计.由(5)式,可用限定记忆递推最小二乘法给出 $\alpha(k)$ 的递推估计(因等式右边 $\phi_k(\mathrm{B})$ 中参数是已知的),再由(6)式即可得:$\hat{a}^*(k)=A^{-1}(\hat{\varphi}(k))\hat{\alpha}(k)$.由此可得 $a(k)$ 的估计为

$$\hat{a}(k)=\left(a_1^*(k),\frac{1}{\Delta t}a_2^*(k),\frac{1}{(\Delta t)^2}a_3^*(k),\frac{1}{(\Delta t)^3}a_4^*(k)\right). \tag{19}$$

容易验证:$\sigma_\varepsilon^2(k+1)$ 有如下递推估计式:

$$\sigma_\varepsilon^2(k+1)=\sigma_\varepsilon^2(k)+[Y_{k+1}-\sum_{i=1}^{p}Y_{k-i+1}\varphi_i(k+1)]^2-[Y_{k-N+1}-\sum_{i=1}^{p}Y_{k-N+1-i}\varphi_i(k)]^2. \tag{20}$$

至此,已获得迭合 AR 模型中未知参数的全部递推估计式.

3　仿真计算及应用(Simulation and application)

仿真时变迭合 AR 模型为:

$$y(t)=a_0(t)+a_1(t)t+a_2(t)t^2+a_3(t)t^3+e(t),$$

$$e(t)=\varphi_1(t)e(t-1)+\varphi_2(t)e(t-2)+\varepsilon(t),$$

$$\varepsilon(t)\sim N(0,0.02^2).$$

其中
$$a_0(t)=5+0.5x_{[t/200]+1},$$
$$a_1(t)=3.5+0.3y_{[t/200]+1},$$
$$a_2(t)=0.2+0.02z_{[t/400]+1},$$
$$a_3(t)=-0.05+0.005u_{[t/400]+1},$$
$$\varphi_1(t)=1.3+0.1v_{[t/200]+1},$$
$$\varphi_2(t)=-0.4+0.04w_{[t/200]+1}.$$

这里 x_k,y_k,z_k,u_k,v_k,w_k 为相互独立的(0,1)上的均匀分布随机数序列,[·]为取整函数.表 1 给出 100 组数据(每组 800 个等距采样点)仿真计算的参数估计值的平均均方根误差.这一指标反映了估值与真值的平均差别,也反映了估值在真值附近的离散程度.表 1 结果表明:算法能够自适应地跟踪模型参数的变化,效果是令人满意的.应用本文算法,我们对某飞行器实测数据时变迭合 AR 模型中量测噪声 AR(2)的参数进行了估计.结果表明:该量测噪声一步相关从负相关变到正相关,而二步相关则从不相关到正相关,又变为负相关.

表 1　参数估计值的平均均方根误差

Table 1　Average square-root error of estimated parameters

$\sigma_{a_1^*(t)}$	$\sigma_{a_2^*(t)}$	$\sigma_{a_3^*(t)}$	$\sigma_{a_4^*(t)}$	$\sigma_{\varphi_1^*(t)}$	$\sigma_{\varphi_2^*(t)}$
0.21	0.13	0.0070	0.0018	0.037	0.015

参考文献(References)

1　王正明,易东云.测量数据建模与参数估计.长沙:国防科技大学出版社,1996

2　易东云,王正明.多项式信号加 AR 噪声模型的参数估计.电子学

(下转第 738 页)

式变换给出了系统性的求解方法,本文的结果可用于参数摄动系统的鲁棒性能分析.

参考文献(References)

1 Packard A, Doyle J. The Complex structured singular value. Automatica,1993,29(1):71 - 109

2 Morton B G, McAfoos R M. A mu-test for robustness analysis of a real-parameter variation problem. Proceedings of American Control Conference, Boston, 1985,135 - 138

3 Skogestad S, Morari M and Doyle J C. Robust control of ill-conditioned plants: high-purity distillation. IEEE Trans. Automat. Contr., 1988,33(12):1092 - 1105

本文作者简介

恒庆海 见本刊 1999 年第 2 期第 271 页。

(上接第 735 页)

报,1995,23(6):84 - 88

3 潘士先.谱估计和自适应滤波.北京:北京航天航空大学出版社,1991

4 Dandawate A V. Modeling periodic moving average processes using cyclic statistics. IEEE Trans. Signal Processing, 1996,44(3):673 - 684

5 Mohler I. Nonlinear Time Series and Signal Processing:Lecture Notes in Control and Information Science. Berlin:Springer-Verlag,1988

本文作者简介

易东云 1965 年生.1992 年毕业于国防科技大学系统工程与数学系,获硕士学位,副教授.获部委级一等奖一项,合作出版著作 2 本,发表论文 30 篇.目前主要从事动态系统分析等方面的研究.

王正明 1962 年生.1986 年毕业于华中理工大学应用数学系.自动控制专业博士,教授,控制理论与系统工程博士生导师.已获部委级一等奖一项、二等奖三项,发表学术论文 40 余篇,合作出版著作 3 本.1994 年获准享受政府特殊津贴.目前主要从事动态系统分析与测量数据处理方面的研究工作.